

Alfabetização numérica: um ensaio

José Eduardo Ferreira da Silva

(Aluno do Curso de Mestrado em Educação Matemática)

Trabalho apresentado à Prof.^a
Dr.^a Dair Aily Franco de Camargo na
Disciplina ***Didática Aplicada ao Ensino da Matemática***.

UNESP/RIO Claro - 1º semestre de 1996

ÍNDICE

1 - Introdução	02
2 - O processo de Contagem	02
3 - O número	02
4 - A gênese do número	03
4.1 - A invariância dos conjuntos	03
4.2 - A correspondência provocada	04
4.3 - A seriação	05
4.4 - A ordenação e a cardinalidade	05
5 - A ferramenta de contagem	06
6 - Mapa conceitual	08
7 - Atividades	
7.1 - Considerações gerais	09
7.2 - Enumeração	10
7.3 - Numeração	11
7.4 - Ordenação e cardinação	13
8 - Avaliação	14
9 - Bibliografia	
9.1 - Fontes primárias	14
9.2 - Teoria e crítica	15

1- Introdução

Em Silva&Wodewotzki (1996), verificamos que questões como maior eficiência no ensino e na aprendizagem, principalmente, quando se pressupõe a utilização efetiva de microcomputadores, não pode perder de vista a realidade na qual, estão inseridos nossos alunos e professores.

Outra consideração importante é o fato de que as providências no sentido de reduzir as intoleráveis reprovações são em sua maioria burocrática. Não há dúvida de que, estatisticamente, observa-se uma queda significativa do número de reprovações, principalmente, nas séries iniciais. Entretanto, o preço destas medidas é um número cada vez maior de alunos chegando ao fim do ciclo básico sem apresentar um conhecimento satisfatório daquele que é o tecido de nosso sistema social, ou seja, o sistema de numeração hindu-arábico.

Portanto, ao se pensar em atividades para o processo de ensino-aprendizagem torna-se necessária uma preocupação suplementar, ou seja, estas atividades devem, também, oferecer possibilidades avaliativa contínuas e sistemáticas afim de determinar o domínio ou a falta de domínio das habilidades permitindo, tanto ao aluno como ao professor, informações para a melhoria de desempenhos ainda não dominados, ou incentivo, no caso dos já alcançados.

Estas considerações permearam o desenvolvimento deste trabalho, cujo objetivo, é fundamentar, dentro da teoria psicogenética de Jean Piaget, um rol de atividades para o processo de ensino-aprendizagem dos fundamentos de nosso sistema de numeração, isto é, os algarismos hindu-arábicos.

2 - O processo de contagem

Ao pensar em um processo de ensino-aprendizagem que tem por objetivo de trabalho o sistema de numeração hindu-arábico, sem dúvida, a primeira questão que se apresenta é :— *O que significa contar os objetos de uma determinada coleção?*

Contar os objetos de uma coleção, de acordo com Ifrah (1991 p.44), é destinar a cada um deles um símbolo correspondente a um número tirado da seqüência dos números inteiros naturais, começando pela unidade e procedendo pela ordem até encerrar os elementos. Nesta coleção, assim, transformada em seqüência, cada um dos símbolos será, conseqüentemente, o número de ordem do elemento ao qual foi atribuído. E "o número de integrantes deste conjunto" será o número de ordem do último de seus elementos. Mas, apesar da precisão, esta definição pode nos remeter, por exemplo, à seguinte questão:— *O que é a seqüência dos números inteiros naturais?*

Recorrendo à matemática, verifica-se que, se por uma lado, Peanoⁱ (apud Oliveira&Silva, 1965) apresenta considerações suficientes para uma definição clara e precisa da seqüência dos números inteiros naturais, por outro lado, lança-nos, enquanto educadores, de encontro a uma barreira conceitual, pois elege o número natural, principal instrumento de suas considerações, como uma noção não definida. Considerando que, do ponto de vista educacional, estas considerações não apresentam subsídios à prática escolar, procurar-se-á redefinir o processo de contagem através de uma linha histórica e, portanto, menos específica.

Sabe-se que há cerca de 6.000 anos, em algumas áreas de agricultura particularmente intensiva, vilas dispersas de povos neolíticos deram lugar a sociedades mais complexas, as primeiras civilizações, que surgiram, aparentemente, de forma independente em quatro áreas bem diferentes: no baixo vale dos rios Tigre e Eufrates; no vale do Nilo; no vale do Indus; e o rio Huang. Entretanto, apesar das inúmeras diferenças culturais existentes entre estes povos, uma característica comum a todos, sem exceção, foi a elaboração e o aperfeiçoamento contínuo de instrumentos capazes de proporcionar ao homem o controle sobre a pluralidade concreta, instrumentos estes que, sem dúvida, constituem a base de toda estrutura social, seja ela capitalista ou não.

Considerando, por hipótese, que o desenvolvimento destas ferramentas é fruto de um conjunto de estímulos que capacitam, ao ser humano, observar com acuidade a noção heterogênea que se apresenta a partir do mundo empírico ,denominar-se-á por processo de contagem a maneira empregada, por este ser humano, para que tal controle seja exercido.

Se assim o é, passemos a uma análise pormenorizada do instrumento, denominado número, através do qual o homem conseguiu expressar estes estímulos sensoriais.

3 - O Número

Se voltarmos aos povos citados anteriormente, iremos verificar que apesar dos mesmos terem gerados números com formatos bem diferenciados, provavelmente, em função do modo independente com que os mesmos desenvolveram-se, a noção de número, em quaisquer um desses formatos, recobre dois aspectos

complementares: o chamado *cardinal*, baseado unicamente no princípio da correspondência, e o chamado *ordinal* que exige ao mesmo tempo o processo de agrupamento e o da sucessão e cuja diferença será, inicialmente, estabelecida por um exemplo simples.

Um jogo de sinuca possui sete bolas. Aqui o número sete, por indicar o total de bolas do jogo, é tratado como número *cardinal*. No entanto, neste mesmo jogo de sinuca, as bolas, além das cores diferenciadas, são, cada uma delas, associadas aos numerais 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 sendo, inclusive, esta a ordem que as mesmas são lançadas, uma após a outra, nas caçapas. Assim, quando dizemos que “a bola sete é de cor preta”, o número sete não mais está sendo empregado sob seu aspecto cardinal, mas ele especifica o lugar bem determinado da bola preta (no caso, a última a ser lançada nas caçapas) de um conjunto que compreende sete bolas, tratando-se, então, de um número *ordinal*.

Entretanto, estudos arqueológicos e estudos etnográficos parecem mostrar (Menninger, 1970; Ifrah, 1990; Gundlach, 1991; Hogben, 1956; Smith, s/d e Boyer, 1974) que estas ferramentas não surgiram de pronto, mas foram frutos de um desenvolvimento lento da qual a enumeração, que consiste-se por um cotejo um-a-um dos objetos de uma coleção com outros objetos usados como marcadores, precedeu o processo de numeração, que se resume na substituição dos objetos marcadores por palavras da linguagem falada, pressupondo a seriação; e a numeração, por sua vez, precedeu o número.

Assim sendo, é razoável considerar que o processo de contagem seja definido a partir de dois pressupostos: o primeiro, a pluralidade concreta —uma noção heterogênea que apresenta-se ao homem a partir do mundo empírico e, em segundo, a enumeração; fruto de uma estruturação sintética a priori que, de acordo com Kant (apud Machado, 34), não é uma impressão sensível de algo situado externamente ao homem, mas, sim, uma das matrizes permanente e invariante de tal conceito que existe em nós e que independe das impressões sensíveis.

Independente da veracidade ou não de tais considerações sobre a gênese do número, as mesmas exigem uma análise mais acurada, pois, através delas, pode-se acentuar o aspecto de imaturidade do ser em crescimento, impossibilitando, do ponto de vista educativo, que se ultrapasse os limites impostos pelo ensino tradicional, principalmente, aquele cujo o pressuposto, de acordo com Garcia (1977), é o de que a criança já contém em si todos os elementos a serem plenamente realizados na idade adulta. Assim sendo, a transmissão do maior número possível de conhecimentos, na infância, é fundamental para a instrumentação do adulto em suas necessidades sociais.

Na busca de uma abordagem que pudesse subsidiar uma análise da gênese do número, três foram as possibilidades que se apresentaram: a arqueologia, a etnografia e a psicogenética, a qual foi, finalmente, escolhida. Ressalte-se, que a escolha pela abordagem psicogenética se deu a partir do pressuposto de que é pouco provável que a arqueologia e a etnografia sejam capazes de fornecer elementos que possam subsidiar uma fundamentação sólida de tal análise, pois, do ponto de vista arqueológico, é possível que a invenção e utilização de ferramentas para contagem seja oriunda de uma antigüidade tão remota que, provavelmente, exauriu-se a muito a possibilidade de uma descoberta significativa neste sentido e, do ponto de vista etnográfico, é a limitação que vem sendo imposta aos estudos sobre estes aspectos, em função do rápido processo de modernização e extinção que vem sofrendo os povos primitivos.

4 - A gênese do número

4.1 - A invariância dos conjuntos

As noções de número, de acordo com Piaget&Szeminska (1975), estruturam-se progressivamente em função de uma *a priori* funcional do pensamento que constitui uma condição necessária de toda atividade racional, a conservação.

A conservação de quantidades descontínuas é avaliada, por estes autores, em função da configuração perceptiva. Os resultados obtidos parecem demonstrar que as quantidades descontínuas não são, inicialmente, consideradas pelas crianças como constantes, mas que sua conservação se constrói pouco a pouco, segundo um mecanismo intelectual cujo desenvolvimento se dá em três fases distintas. _

Na primeira fase, o único princípio de síntese que se encontra à disposição da criança é a própria forma do conjunto, enquanto intuição fundada na percepção global, sem que operações permitam reunir os pedaços esparsos desta intuição perceptiva, se houver o rompimento desta forma. Portanto, as considerações *ter mais* ou *estar igual* variam, por exemplo, segundo o espaço intercalado entre os objetos, não havendo uma equivalência durável entre os dois conjuntos, ou seja, a correspondência e o próprio processo de enumeração

aparecem nas crianças da primeira fase como processo de quantificação muito menos seguros do que uma avaliação direta a partir das relações perceptivas globais.

Na segunda fase, a criança já consegue elaborar a noção de quantidade constante, apesar das indicações opostas da percepção imediata. Neste nível, a criança é capaz de conservar, caso não haja uma transformação considerável.

Na terceira fase, a equivalência antecede desde o início as relações perceptivas, ou seja, uma vez colocadas em correspondência termo a termo, duas coleções são concebidas como equivalentes sejam quais forem suas mudanças de formas, ou seja, as relações perceptivas passam a ser coordenadas entre si.

Verifica-se, portanto, que se a correspondência termo a termo surge como instrumento empregado pelo espírito para decompor as totalidades a serem comparadas entre si, ela não basta sob sua forma original ou suas formas originais para conferir às coleções correspondentes a equivalência propriamente dita, ou seja, a mesma potência ou valor cardinal, concebido a título de constante originada da correspondência como tal.

Assim sendo, é importante analisar o mecanismo da própria correspondência, considerada não mais em seus resultados mas em seu desenvolvimento espontâneo, ou seja, em situações onde a criança é obrigada a inventar por si só a correspondência e utilizar-se-á dessa correspondência sob a forma que lhe convém, ou seja, a correspondência provocada e a equivalência das coleções correspondentes.

4.2 - A correspondência provocada

Neste estudo, ficam distintas, sob o ponto de vista psicológico e não lógico, duas espécies de situações as quais o ser humano é levado a descobrir ou a praticar a correspondência termo a termo.

Em primeiro lugar, os pesquisadores verificam se a correspondência termo a termo sob suas formas mais familiares, tais como a correspondência entre conteúdos e continentes ou troca de um contra um, são suficientes para assegurar a conservação, e, finalmente, os procedimentos espontâneos de quantificação empregados para determinar o valor das quantidades descontínuas (coloca um A diante de um B), sendo que iremos nos deter, especificamente, em conclusões a respeito dos métodos empregados na determinação do valor cardinal de uma coleção. Ressalte-se, que os três métodos distintos, observados nos experimentos, sincronizam-se com as fases delineadas pelo estudo da conservação.

O primeiro método, denominado método da comparação global, caracteriza-se por uma simples cópia com referência às qualidades de conjunto. Trata-se, pois, de um método que, por ser ligado a certos estados perceptivos, não apresenta um mecanismo operatório que permita unir os diferentes estados sucessivos numa totalidade dinâmica ou num sistema de relações. Sua principal característica psicológica é a irreversibilidade quase completa do pensamento, isto é, a predominância da intuição perceptiva, sobre as operações, não permitem que as relações sejam decomponíveis em unidades qualitativas ou numéricas e nem coordenadas entre si, mas, simplesmente, aglomeradas num todo não estruturado, não podendo constituir um sistema reversível.

O segundo método é um prolongamento do primeiro. Apesar de mais preciso, mais rico e um pouco mais móvel, ainda, é limitado à intuição sensível e assim, não sendo capaz de dissociações e de composições propriamente operatórias e lógicas é considerado semi-operatório. A expressão lógica da operação é a reversibilidade que, no entanto, permanece incompleta, pois as relações em jogo não podem mais se compor no caso de alterações das figuras e a constância não se acha ainda construída, ou seja, se o sujeito deste nível não acredita ainda que uma figura transformada corresponda e seja equivalente quanto ao número de seus elementos a sua forma inicial, admite que se pode redescobrir essa forma inicial a partir da forma alterada.

Na terceira fase, a correspondência conduz a uma equivalência durável e necessária, isto é, a noção de que as coleções correspondentes permanecem equivalentes independentemente de sua configuração ou da disposição dos elementos. Note-se que esse progresso se realiza de uma maneira muito contínua, por uma liberação progressiva da figura ou da intuição perceptiva. Com efeito, basta que a correspondência qualitativa ou a correspondência das partes respectivas de duas figuras se liberte, por pouco que seja, de sua forma precisa para que os elementos em jogo se tornem unidades intercambiáveis e que a correspondência adquira, assim, um caráter “qualquer” ou numérico. Mas esta libertação supõe uma coordenação durável das relações em jogo, sem que seja necessário recorrer a esta intuição unificante que é a figura atual, ou, mais precisamente, ela supõe um relacionamento das intuições sucessivas até aí consideradas como irredutíveis ou incoordenáveis.

O fator fundamental deste último desenvolvimento parece encontrar-se na mobilidade e reversibilidade inteiras adquiridas pelo tipo de ação que intervém nas construções mentais. Com efeito, a operação efetuada não é mais imediatamente absorvida pelo resultado intuitivo obtido; ela dele se separa, ou seja, a ação se torna reversível.

As ações executadas formam, doravante, um sistema conjunto, do qual a reversibilidade é fonte de constância. Este sistema é, simultaneamente, o princípio de uma generalização das correspondências qualitativas com a correspondência numérica, a qual considera cada elemento como uma unidade independente de suas qualidades e, portanto, igual as outras, só diferindo delas por sua posição momentânea na seriação.

4.3 - A seriação

Como colocar em correspondência termo a termo os elementos de duas coleções não implica, necessariamente, em um primado do número cardinal sobre o ordinal, será preciso verificar se o caráter intuitivo das séries a serem colocadas em relação não permitirá uma correspondência mais estável.

Neste sentido, de acordo com Piaget & Szeminska (1975), três são as operações possíveis: a seriação qualitativa simples, a correspondência qualitativa entre duas seriações (similitude) e a correspondência numérica (ordinal) entre duas séries.

As experiências realizadas com o objetivo de verificar se estas correspondências ocasionarão em particulares equivalências cardinais mais duráveis foram estruturadas a partir de cinco problemas que, para a sistematização dos resultados obtidos, reduziram-se a três questões: a construção da correspondência serial, a determinação da correspondência serial quando ela não é mais percebida e a reconstituição da correspondência ordinal quando ela não é mais percebida.

Sem dúvida, os resultados obtidos foram decisivos para a hipótese piagetiana de que a ordenação supõe sempre a cardinação e, reciprocamente, ficaram marcadas, em cada uma das experiências, a presença das três fases, não só sincrônicas entre si mas, também, sincrônicas com aquelas detectadas nos estudos anteriores. Sendo assim, torna-se importante nos atermos aos procedimentos dos sujeitos frente as atividades propostas.

Na construção da correspondência serial, as três fases apresentam-se da seguinte forma: comparação global sem seriação exata ou correspondência termo a termo espontânea, seriação e correspondência progressivas e intuitivas e, por fim, seriação e correspondência imediatas e operatórias.

Na determinação da correspondência serial, quando ela não é mais diretamente percebida e, por conseguinte, na passagem à correspondência ordinal temos as situações: inicialmente, o sujeito não descobre a correspondência entre o elemento de uma série com o seu correspondente na outra série; em seguida, ou o sujeito tenta contar ou então recorre a uma nova correspondência termo a termo facilitada pela disposição semi-intuitiva das fileiras a comparar. Mas nos dois casos, são cometidos diversos erros sistemáticos, dos quais o mais notável é a confusão da categoria procurada e a do termo precedente e, por fim, o sujeito descobre a correspondência combinando as noções ordinais e as noções cardinais.

Finalmente, com referência à reconstituição da correspondência quando uma das fileiras ou as duas são desfeitas, temos: durante a primeira fase, o sujeito não é capaz de reconstruir por si mesmo a série ou as séries e decide a correspondência pela vista ou arbitrariamente. Durante a segunda fase, o sujeito conta mas sem considerar a ordem, ou então confunde a categoria procurada com a do termo anterior. Por fim, durante a terceira fase, o sujeito consegue encontrar a correspondência correta, coordenando a seriação com a cardinação.

4.4 - A ordenação e cardinalidade

Apesar do estudo dos diversos tipos de correspondência parecer mostrar que a implicação mútua da ordenação e da cardinação verifica-se no terreno da gênese psicológica da noção do número, resta formular o problema no próprio terreno da numeração falada com o apoio de um material concreto suscetível de ser seriado e avaliado cardinalmente.

As experiências realizadas neste sentido, não só corroborou a hipótese piagetiana da implicação mútua da ordenação e da cardinação, como também forneceu dados suplementares para o desenvolvimento das conclusões finais, dentre as quais destacar-se-á: "um número cardinal é uma classe cujos elementos são concebidos como unidades equivalentes umas as outras e, no entanto, distintas, com suas diferenças consistindo então unicamente em que se pode seriá-las e, portanto ordená-las. Inversamente, os números ordinais são uma série da qual os termos, ao mesmo que se sucedem segunda as relações de ordem que lhe são atribuídas por suas posições respectivas, constituem igualmente unidades equivalentes umas as outras e, conseqüentemente, suscetíveis de serem reunidas cardinalmente. Os números finitos são, portanto, simultaneamente cardinais e ordinais, e isso resulta da própria natureza do número, que é ser um sistema de classes e de relações assimétricas fundidas num mesmo todo operatório. Os cardinais, portanto, resultam de uma abstração da relação e essa abstração não altera a natureza de suas operações, pois todas as ordens

possíveis que se possam atribuir a n termos vem a dar na mesma soma cardinal n . Os ordinais, por seu lado, resultam de uma abstração da classe, abstração igualmente legítima, e, por esta mesma razão, o enésimo termo finito corresponderá sempre a um conjunto cardinal de n . Mas esta dupla abstração não impede em nada o número inteiro finito de permanecer uno e implicar a indissociável solidariedade das ordens.”(Piaget&Szaminska, 1975, p.219)

Sob o prisma destas considerações teóricas, apresentar-se-á um conjunto de três atividades, cujo objetivo específico é apresentar à criança o conjunto dos dez símbolos com suas implicações cardinal e ordinal, símbolos estes, que fundamentam a ferramenta de uso comum, da qual se utiliza o homem moderno para realizar o procedimento de contagem, ou seja, o sistema hindu-arábico.

No entanto, antes que as atividades propriamente ditas se apresentem, será necessário, a fim de que uma ordem de aplicação seja definida, um mapa conceitual que, por sua vez, será precedido por um breve histórico do desenvolvimento do sistema numérico hindu-arábico.

5 - A ferramenta de contagem

De acordo com as considerações anteriores, verifica-se que o número, a expressão maior do processo de contagem, consiste-se, num primeiro plano, em uma profunda interação entre o sujeito e o objeto que, de acordo com Piaget, é dada no interior do sujeito. Entretanto, é necessário um segundo passo, ou seja, uma ferramenta que possibilite, ao homem, a utilização do número de forma significativa, ferramenta esta, que será denominada sistema de numeração.

O ancestral de nosso sistema moderno nasceu no norte da Índia, por volta do século V da era Cristã. Como em outras civilizações, os habitantes da Índia setentrional usaram por um longo tempo uma numeração escrita muito rudimentar, como nos mostram as inúmeras inscrições desde o século III a. C.. Porém, desde o início esta numeração sempre apresentou uma característica diferente das demais. Seus nove primeiros algarismos eram signos independentes de qualquer intuição sensível: eram distintos e não buscavam evocar visualmente os números correspondentes.

Mas, não submetendo-se ainda a regra de posição, estes algarismos não foram operacionais como os nossos. De base decimal esta numeração repousava, de fato, sobre o princípio da adição e atribuía um algarismo especial a cada um dos elementos do conjunto: { 1, 2, 3, ..., 9, 10, 20, 30, ..., 90, 100, 200, ..., 900, 1000, 2000, ... } sendo, portanto, muito limitada não só com relação as possibilidades operatórias como, também, nas possibilidades de se representar números grandes (não era possível passar de 99.999)

A impossibilidade representacional, começou a ser vencida a partir do momento em que os hindus recorreram ao artifício de representar os números "por extenso", isto é, atribuíram um nome particular a cada um dos nove primeiros números e um nome particular à dezena e a cada uma de suas potências.

1 - eka	6 - sat	100 - sata
2 - dvi	7 - sapta	1.000 - sahasra
3 - tri	8 - asta	10.000 - ayuta
4 - catur	9 - nava	100.000 - laksa
5 - pañca	10 - dasa	

As grandes diferenças de nosso atual sistema eram a maneira pela qual exprimiam os números - escreviam os números na ordem das potências ascendentes de sua base, começando pelas unidades simples correspondentes - e atribuíam às diferentes potências de dez nomes totalmente independentes umas das outras. Assim, o número 14235 era dado da seguinte forma:

pañca tri dasa dvi sata catur sahasra eka ayuta
cinco, três dezenas, duas centenas, quatro mil, uma dezena da milhar

Possivelmente com a finalidade de abreviar, por volta do século V de nossa era, os hindus suprimiram, no corpo dos números expressos deste modo, qualquer menção aos nomes indicadores da base e suas diversas potências. Desta maneira, o número 14235 foi a partir de então expresso por um enunciado do tipo:

"cinco.três.dois.quatro.um"

No entanto, se por um lado este expediente apresentava vantagens e facilidades, por outro apresentou uma grande dificuldade em se representar números como, por exemplo: 301. Entretanto, ao que parece os hindus não levaram muito tempo para contornar este obstáculo. Recorreram à palavra *sunya*, que significa "vazio" para resolver de uma vez por todas o problema. Assim, o número 301 foi enunciado da seguinte forma:

eka śūnya tri

Com este expediente, os hindus além de eliminarem qualquer possibilidade de equívoco, conseguiram os ingredientes necessários à constituição da numeração moderna, ou seja:

- para as unidades de 1 à 9, eles dispunham realmente de algarismos distintos e independentes de qualquer intuição visual direta;
- eles já conheciam o princípio de posição;
- e acabavam de descobrir o zero.

Foi a reunião destas três idéias que produziu o atual sistema de numeração. A dupla descoberta da regra de posição e do zero data no máximo do século V de nossa era. Seus primeiros exemplos se encontram num tratado de cosmologia com o título de Lokavibhāga, publicado por membros do movimento religioso hindu jainista em 25 de agosto de 458 do calendário juliano¹.

A partir de então, o sistema conheceu um considerável sucesso junto aos matemáticos e astrônomos hindus expandindo-se a partir do século VI até fora das fronteiras da Índia, sendo largamente empregado pelos gravadores de inscrições em pedra das civilizações khmer, cham, javanesa, etc.

Entretanto, a ciência hindu não exerceu diretamente sua influência na Europa. Foi preciso mais de um milênio para que este sistema de numeração fosse, definitivamente, aceito, pelo mundo ocidental, pois por volta do século V d.C. tem início, com a eclosão de revoluções sociais e políticas em todo o mundo eurasiático, o período conhecido, na Europa Ocidental, por Idade Média.

Entretanto, se tal descrição pode ser apropriada em termos de história européia, não se aplica quando uma perspectiva mais abrangente da história mundial adotada. Do século VIII ao século XIII desenrolou-se um dos períodos mais brilhantes da história da ciência no mundo muçulmano. Nos países conquistados, foram recolhidas todas as obras gregas filosóficas, científicas ou literárias que foi possível encontrar. Todas eram traduzidas em língua árabe e cuidadosamente estudadas. Nesta época, as obras de síntese se multiplicaram e se expandiram.

Os árabes se interessaram também pelas culturas orientais. Com relação aos números, primeiro eles se interessaram pela numeração grega, cujo uso foi adaptado às 28 letras de seu próprio alfabeto. Por intermédio dos gregos e dos cristãos da Síria e da Mesopotâmia eles recuperaram, também, o velho sistema sexagesimal posicional e o zero dos babilônicos, adaptando-os a sua própria escrita em suas tábuas astronômicas.

Mas, quando iniciaram suas relações comerciais com a Índia pelo golfo Pérsico, a partir do porto de Bassora, os árabes se iniciaram na astronomia, na aritmética e na álgebra desta civilização. A partir do final do século VIII, adotaram o conjunto do sistema numérico hindu: números, numeração decimal de posição, zero e métodos de cálculo.

Mas, os árabes não se contentaram em conservar as fundações das culturas grega, babilônica e hindu, trazendo também sua própria e considerável contribuição para o edifício. Ao recolher e traduzir as obras do passado, eles acrescentaram, de fato, vários comentários, neles misturando métodos gregos e hindus, combinando-os às vezes a procedimentos de origem babilônica.

Dentre os numerosos matemáticos com os quais contou a civilização árabe-islâmica na época de sua idade de ouro, temos que destacar Abu Abdallah Mohammed Ben Musa, de Khowarizmi (aproximadamente 780-850), bibliotecário da corte do califa abássida Al-Mamun pouco depois do período em que Carlos Magno reinou sobre a Europa.

Este sábio é bastante célebre por duas obras, que contribuíram amplamente para vulgarizar os métodos de cálculo e os procedimentos algébricos de procedência hindu no mundo árabe e depois no Ocidente cristão.

A primeira delas - cujo original se perdeu mas que conhece-se graças a suas traduções latinas - trata da aritmética. É o primeiro livro árabe conhecido no qual a numeração decimal posicional e os métodos de cálculo

¹ Esta data é segura, pois está claramente indicada no texto por sua equivalente numa representação hindu então em uso; além disso, ela é confirmada por indicações relativas a determinados dados astronômicos hoje conhecidos e datados.

de origem hindu merecem exemplos e explicações detalhadas. Posteriormente, ela desfrutará de uma tal reputação nos países da Europa ocidental que o nome de seu autor se tornará sinônimo do próprio sistema.

Latinizado, o nome de al-Khowarizmi transformou-se, sucessivamente em *Alchoarismi*, depois em *Algorismi*, *Algorismus*, *Algorismo* e por fim em *Algoritmo*. Durante muito tempo, este termo designou, assim, na Europa o cálculo por escrito inventado pelos árabes, antes de adquirir a acepção mais ampla que hoje lhe atribuímos².

Ressalte-se, que quando os árabes começaram a se utilizar do sistema numérico hindu, os nove primeiros algarismos deste sistema foram de início pura e simplesmente recopiados. Mas quando passaram pelas mãos dos escribas e copistas arábicos-persas, os símbolos foram pouco a pouco sofrendo modificações gráficas e se afastaram de seus protótipos³. No entanto, é a grafia própria dos árabes ocidentais que atingirá os povos cristãos da Europa medieval a partir da Espanha, antes de dar origem aos algarismos de que hoje conhecemos e que receberam por gerações consecutivas a denominação de "algarismos árabicos" e, finalmente, "algarismos hindu-árabicos".

6 - Mapa conceitual

Para chegar-se à seqüência dos números inteiros naturais um procedimento que afigura-se mais qualitativo do que quantitativo deve ser, inicialmente, considerado. Este procedimento, o qual será denominado por numeração, consiste-se na criação de uma linguagem para as quantidades através de um processo ordinal. Aos signos oriundos desta linguagem denominaremos numerais sendo que estes, no sistema hindu-árabico, são signos imotivados que fundamentam-se numa convenção social onde cada diferente signo relaciona-se de maneira instituída a uma diferente quantidade.

A análise da maneira pela qual estes signos se constituem, fornece-nos uma imagem acústica daquilo que devemos entender por seqüência natural dos números inteiros, sendo que esta se dá a partir dos seguintes pressupostos:

- a propriedade que permite a bijeção entre cada elemento do conjunto de todos os conjuntos equivalentes ao conjunto unitário será denominado unidade e seu signo será 1;
- os subseqüentes números naturais serão obtidos por recorrência a partir do 1 pelo acréscimo de uma unidade ao número que o antecede. Assim, teremos: $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4$, etc.;
- se n é um número natural então $n + 1$ é o sucessor de n ;

Portanto, se os números são organizados a partir do 1 de forma que o precedente seja sempre o sucessor do antecedente obteremos a seqüência natural dos números inteiros.

Assim, como visto anteriormente, para contar basta ao homem o expediente de destinar a cada objeto de uma coleção um numeral tirado da seqüência natural dos números inteiros começando pela unidade e procedendo pela ordem até encerrar os elementos da coleção. Transformar esta coleção de objetos nesta seqüência garante o processo de contagem pois cada um dos símbolos será o número de ordem do elemento ao qual foi atribuído e o número de integrantes deste conjunto será o número de ordem do último de seus elementos.

Mas, se por um lado a maneira instituída possibilita ao homem um expediente para contar, por outro, o processo de recorrência implica em uma infinidade de diferentes signos sendo que, se assim o fizéssemos, a habilidade de contar, provavelmente, ficaria limitada à capacidade de memória. Desta forma, o expediente, atualmente, utilizado para contornar esta dificuldade é o sistema de numeração hindu-árabico, cujas características são:

- seus signos são : o 1 indicando a unidade, o 2 indicando o sucessor de 1, o 3 sucessor de 2, o 4 sucessor de 3, o 5 sucessor de 4, o 6 sucessor de 5, o 7 sucessor de 6, o 8 sucessor de 7, o 9 sucessor de 8 e o 0 que é o sinal utilizado para representar a ausência de unidades;

² Na acepção moderna, algoritmo significa um procedimento cuja execução termina para quaisquer valores dos dados, sendo que, um procedimento é uma seqüência finita de instruções que podem ser executados por um agente computacional, seja ele humano ou não.

³ A origem de nossos "algarismos árabicos" não é aquela empregada atualmente por todos os países do Golfo Pérsico (os "algarismos *hindi*). Nossos algarismos atuais vêm dos árabes ocidentais (os que povoaram o norte da África e uma parte da Espanha). Esta variação eram denominadas "algarismos *ghobar*".

- estes signos serão denominados algarismos;
- qualquer número maior que 9 deverá ser indicado por uma combinação dos algarismos, baseada no princípio da posição.
- os signos serão colocados da esquerda para a direita, os quais, nesta ordem, serão denominados algarismos de primeira ordem, algarismo de segunda ordem e, assim, sucessivamente.
- Cada unidade de uma ordem superior representa dez unidades da ordem inferior.

Através deste mapa conceitual, verifica-se uma distinção bem marcada entre o número e o sistema de numeração, pois, enquanto o primeiro refere-se a uma abstração reflexiva por tirar sua substância não dos objetos mas de ações exercidas sobre eles, o segundo, é produto de ações exercidas diretamente sobre os objetos resultantes da ação reflexiva anterior, ou seja, o sistema de numeração é fruto de uma abstração empírica sendo que, estas considerações, irão marcar profundamente às atividades de ensino desenvolvidas a fim de que o aluno possa construir, significativamente, o seu conceito de sistema numérico. No entanto, como já dito anteriormente, este trabalho limita-se as atividades cujo objetivo é apresentação dos algarismos e suas implicações cardinal e ordinal.

7 - Atividades

7.1 - Considerações gerais

As atividades a serem apresentadas carecem, ainda, de algumas considerações de ordem teórica e prática.

Inicialmente, deve ficar claro ao leitor que estas atividades pressupõem que o educando tenha alcançado a conservação de quantidades, pois mesmo acreditando que estas atividades possam identificar a ausência ou incompletude desta estrutura, elas, por si só, não poderão contribuir no preenchimento destas lacunas⁴. Desta forma, torna-se desaconselhável, do ponto de vista teórico, a aplicação destas atividades em crianças cuja média de idade seja inferior aos 7 anos.

A segunda consideração é de que todas as atividades foram estruturadas para serem aplicadas como jogos. A opção por esta característica nas atividades está na obrigação que o jogo cria, que é da mesma ordem do desafio. Portanto, abandonar o jogo não faz parte do jogo e a impossibilidade de negá-lo a partir do seu interior, cria uma coerção da execução fiel sem restrições, a não ser a obrigação de ir até o fim do jogo, ou seja, até o fim do desafio. (Baudrillard, 1992 p.151).

Ainda, com relação à característica do jogo, deve-se observar a presença, em cada uma das atividades, das três formas estruturais dos jogos, ou seja, exercício, símbolo e regra. (Piaget apud Macedo, 1995). Esta preocupação visa, principalmente, possibilitar o trabalho em grupo, visto que, *"tomar consciência de uma operação é efetivamente fazê-la passar do plano da ação para o da linguagem, e, portanto, reiventá-la na imaginação para poder exprimi-la em palavras."*(Piaget, 1967) e, o trabalho individual a fim de que o sujeito possa através da ação acionar, se necessário, os mecanismos de auto regulação de sua ação.

Outra consideração é o fato de que as atividades apresentadas não se constituem um conjunto fechado, podendo serem complementadas ou até mesmo substituídas por outras, se assim exigir o processo de ensino-aprendizagem. No entanto, esta consideração não deve invalidar o processo pois *..."é razoável que uma estrutura fraca utilize meios mais elementares e que a atividade crescente corresponda a instrumentos cuja elaboração é mais complexa"*.(Piaget ,1980)

Finalmente, todas as atividades, com exceção dos níveis um e dois da primeira atividade, pressupõem a utilização de computadores. Ressalte-se que a aplicação das mesmas sem este recurso, poderá inviabilizar, totalmente, este processo, visto que, a capacidade de inferência lógica desta mídia foi, efetivamente, explorada no desenvolvimento destas atividades.

⁴Para o caso de crianças em fase pré-operatória recomenda-se a leitura da seguinte obra: "A criança e o número"(Kamii, 1984).

7.1 - Enumeração

O objetivo específico desta atividade é acionar o mecanismo responsável pela enumeração, a fim de chamar a atenção do sujeito para o assunto a ser discutido, ou seja, as nove primeiras quantidades da sequência natural dos números inteiros, bem como a ausência de unidades.

A cada uma das nove primeiras quantidades será impressa a componente cor para que as mesmas possam ser, devidamente, agrupadas. Com isto, está sendo fornecida, ao sujeito, uma condição para que, a partir do objeto, o mesmo possa elaborar as construções necessárias a fim de manter-se a par dos objetos de uma coleção, com outros objetos usados como marcadores.

Esta atividade dividi-se em três níveis, cujas dinâmicas são:

Nível 1: Os sujeitos serão agrupados em duplas. A cada grupo, serão distribuídos cartões coloridos, de forma que cada cor represente um número (um cartão branco, dois cartões amarelos, três cartões azuis etc.). Um programa de computador apresentará na tela um trem, onde cada vagão possuirá uma determinada quantidade de objetos (vide figura 1). Em seguida, as duplas deverão colorir os vagões em função das cores referentes a cada uma das quantidades apresentadas pelos cartões. No caso de erro, a locomotiva desloca-se, puxando apenas os vagões em que a associação estiver correta. A atividade encerra-se após a locomotiva conseguir deslocar-se com a totalidade dos vagões. Este nível está subdividido em três subníveis: 1) as quantidades referentes aos algarismos perceptuais, 2) as quantidades referentes aos algarismos não perceptuais e 3) a totalidade dessas quantidades.

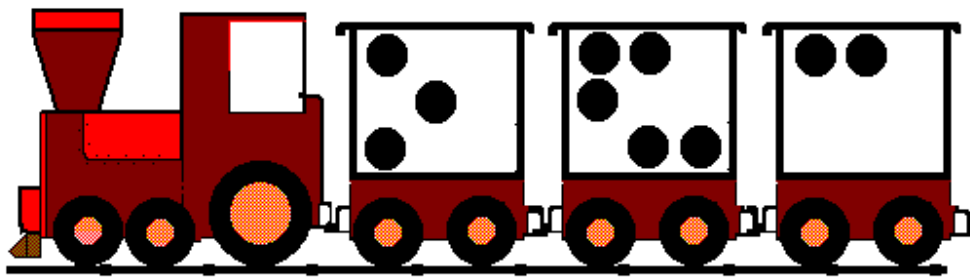


Figura 1

Nível 2: Apesar de continuarem em duplas, os sujeitos, neste nível, deverão, agora, efetuar suas tarefas individualmente. Sua dinâmica é um jogo de dominó (vide figura 2), em que as mesmas quantidades deixam de possuir a mesma cor, passando a assumir um só padrão de distribuição. Isto tem por objetivo eliminar a possibilidade de associações perceptuais pela cor. As regras do jogo são similares ao jogo de dominó, com a seguinte ressalva; no caso de erro, o jogador deverá ceder a vez ao adversário.

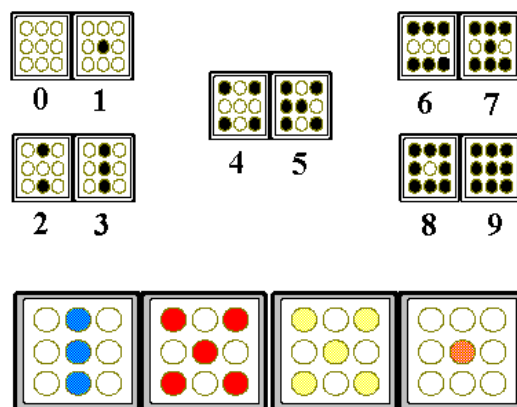


Figura 2

Nível 3: Se, por um lado, o nível anterior elimina a possibilidade de associação perceptual pela cor, por outro, propicia a associação perceptual pela forma. Assim, este nível tem por objetivo causar, caso necessário, um desequilíbrio que, para ser corrigido, irá requerer uma reestruturação cognitiva no sentido do desenvolvimento, pelo educando, de um esquema próprio de contagem. Apesar de análogo ao nível anterior, suas principais características são ausência de similitudes na cor e na distribuição das quantidades. Suas regras são idênticas às do nível 2. (Vide figura 3).

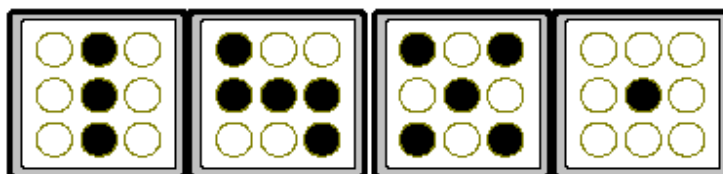


Figura 3

5.2 - Numeração

Esta atividade tem por objetivo associar as quantidades a seus respectivos algarismos. Ressalte-se que, a partir do nível 2, cada um deles estará sempre associado ao sucessor e/ou ao antecessor. A atividade aplicada está subdividida em quatro níveis, sendo que o nível 1 e o nível 3 serão desenvolvidos pelos alunos, em conjunto, e o restante, individualmente.

Nível 1: A atividade consiste em desenhar um determinado algarismo, a partir de uma matriz 5x5, tendo como padrão o mesmo algarismo desenhado em uma matriz semelhante. Ressalte-se que, a cada algarismo, estará sempre associada a quantidade da qual o mesmo é representante. (vide figura 4)

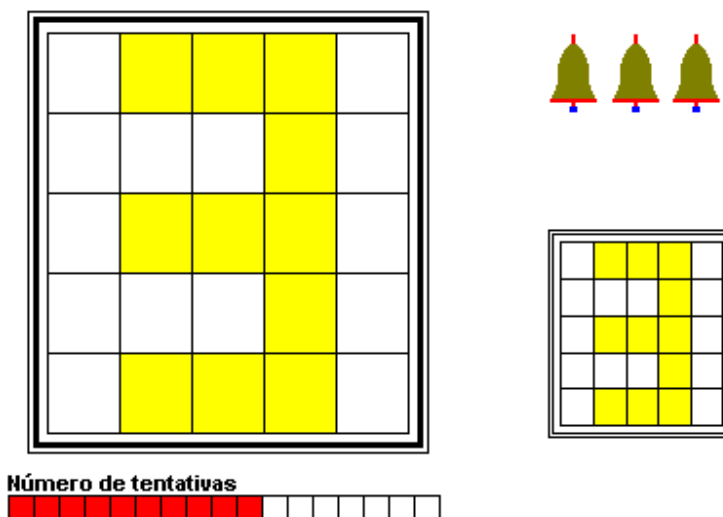


Figura 4

Para a sua dinâmica, os alunos serão agrupados em duplas, sendo que a tarefa de cada grupo consiste em reproduzir na matriz maior, de maneira idêntica, os algarismos de um até nove, que vão sendo apresentados, sucessivamente, com exceção do zero que será apresentado após o nove na pequena matriz. Todas as duplas começam a partir da unidade, sendo que o grupo vencedor será aquele que, primeiramente, atingir o algarismo zero.

Finalmente, para cada algarismo, os grupos têm um limite de tentativas extras, além daquelas que são necessárias à exata confecção do algarismo. Findo este limite, sem que o desenho em questão tenha sido, completamente, elaborado, o grupo será obrigado a recomençar a partir do número 1.

Nível 2: Consiste em uma tarefa similar a anterior, ou seja, desenhar os numerais a partir de uma matriz 5x5, sendo que a ênfase passa a ser o aspecto ordinal de cada algarismo.

As diferenças, com relação ao nível anterior, estão na apresentação de nove barras graduadas, que vão sendo coloridas para indicar a posição do algarismo na sequência dos números naturais e no marcador graduado de tempo. (Vide figura 5)

Trata-se de uma tarefa individual, onde o vencedor será o aluno que conseguir desenhar o maior número de algarismos no menor tempo possível.

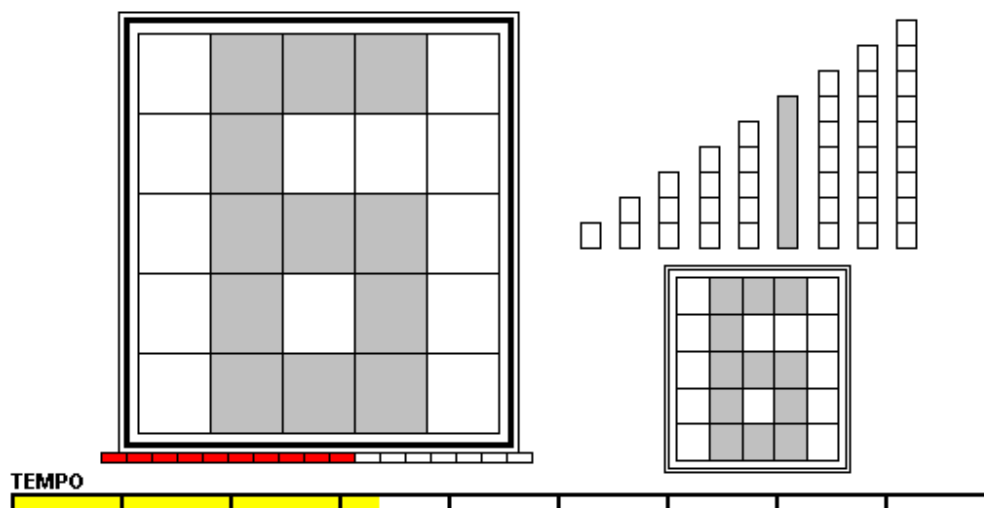


Figura 5

Nível 3: Neste nível, o computador não mais apresenta a pequena matriz. O aluno deverá identificar o algarismo a ser desenhado, através da barra que se apresentar colorida. Entretanto, como suporte para a identificação do algarismo, o computador apresentará todas as barras, devidamente divididas, que antecedem o número em questão (vide figura 6).

Como o programa não apresenta a pequena matriz padrão com o algarismo a ser desenhado, o mesmo permite ao aluno o deslocamento da tela principal para uma tela secundária, a fim de que consultas possam ser feitas. No entanto, o aluno deverá reproduzir em uma folha quadriculada, previamente distribuída, o algarismo da tarefa para que possa ter em mãos, simultaneamente, o padrão e a tarefa a serem realizadas.

Finalmente, a atividade deverá ser feita por duplas de alunos, sendo a dupla vencedora aquela que primeiro desenhar todos os algarismos.

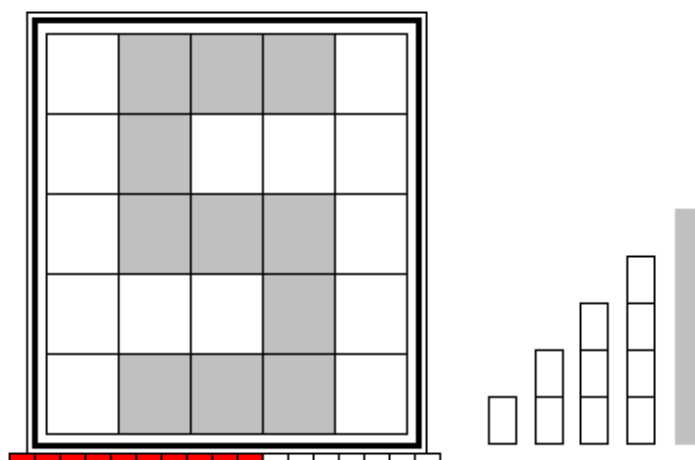


Figura 6

Nível 4: Neste nível, as principais alterações em relação ao anterior são: retorna-se à marcação de tempo para que a atividade seja desenvolvida individualmente, o programa não mais apresenta a possibilidade de consulta aos padrões e, finalmente, o suporte para identificação do algarismo a ser desenhado é apresentado através dos sucessores do algarismo em questão. (Vide figura 7).

Como auxílio para o desenvolvimento de padrões serão distribuídas aos alunos folhas quadriculadas, para que os mesmos possam confeccionar os seus próprios modelos.

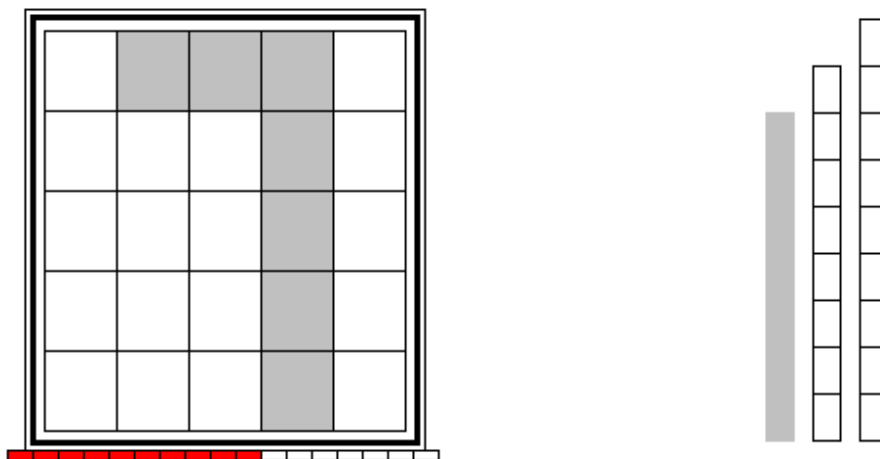


Figura 8

7.3- Ordenação e cardinalidade

Como a ênfase da primeira atividade foi a cardinalidade e a ênfase da segunda atividade foi a seriação, é chegado o momento de se trabalhar, de modo equilibrado, com a cardinalidade e a ordenação dos algarismos hindu-arábicos. Este, portanto, é o objetivo desta atividade que, por sua vez, subdivide-se em três níveis, os quais deverão ser, totalmente, desenvolvidos por duplas de duplas de alunos.

A atividade resume-se em identificar dentre quatro quantidades distintas aquela que é equivalente a uma quinta quantidade. A atividade apresenta, também, 18 bastões paralelos divididos em dois conjunto de nove bastões, sendo que, os bastões da esquerda indicarão o número de acertos e os da esquerda o número de erros. (vide figura 8).

As atividades de identificação, para cada duas duplas, serão encerradas, exceto para o nível 1, assim que um determinado tempo se esgote. A decisão sobre a dupla vencedora dar-se-á em função da diferença entre o o número de acertos e o número de erros, decida-se a dupla vencedora.

Finalmente, os fatos de que enquanto a atividade em si privilegia o aspecto cardinal e, a marcação do placar privilegia o aspecto ordinal, ficarão evidente nas variações entre os níveis que será apresentada a seguir.

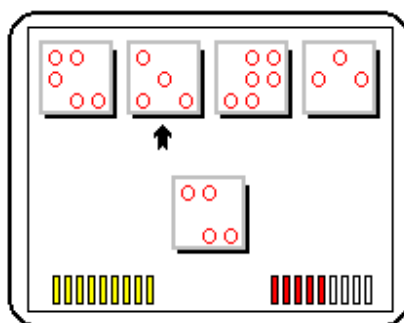


Figura 8

Nível 1: Com o objetivo de ambientar os alunos à dinâmica da tarefa, as atividades de identificação, para uma determinada dupla, será encerrada, pelo computador, assim que a mesma preencher todos os bastões referentes aos acertos ou os bastões referentes aos erros. Esta dupla, por sua vez, deverá aguardar o término

das atividades da dupla adversária para que, em função da diferença entre o o número de acertos e o número de erros, decida-se a dupla vencedora.

Neste nível os alunos deverão identificar quantidade com quantidade, sendo que cada acerto corresponde a um bastão da direita e cada erro um bastão da esquerda. (vide figura 8)

Nível 2: As variações em relação ao nível anterior são: identificação algarismo-quantidade; marcação de tempo; cada bastão indicador de acerto só se acenderá após duas respostas corretas; e, finalmente, cada bastão, sejam os referentes aos acertos ou os referentes aos erros, ao se acenderem apagam o bastão antecedente. (Vide figura 9)

Nível 3: As mudanças em relação ao nível 2 são: identificação quantidade-algarismo e, os batões, referentes aos acertos ou erros, apagam-se, sucessivamente, de forma que o controle dos pontos obtidos será feito em função dos bastões que restarem, findo o tempo de jogo. (Vide figura 10).

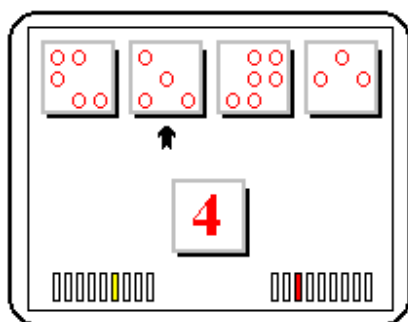


Figura 9

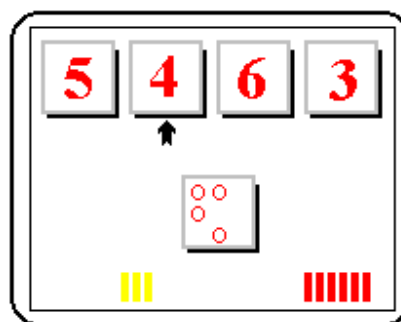


Figura 10

8- Avaliação

Até o momento procurou-se evidenciar a possibilidades da proposta de trabalho com relação ao processo de aprendizagem. Entretanto, considerando-se que uma parte ativa no ensino da matemática é, de acordo com Webb&Briars (1990), checar o que os alunos entendem extraíndo o feedback para, em seguida, utilizar estas informações como guia para o desenvolvimento das experiências de aprendizagem subseqüentes, verificar-se-á que algumas características, presentes nas atividades, permitem que a proposta possa ser encarada, também, como uma proposta avaliativa. Dentre estas características, destacar-se-á:

- possibilidade de verificar o rendimento através de reprodução livre com expressões próprias, relacionamento, explicações práticas e explicações causais;
- necessidade de um esclarecimento constante do que é desejado, tantopara o aluno como o professor e a análise constante dos desempenhos desenvolvidos;
- possibilidade de identificação do tipo de erro.

Portanto, mesmo não superando, enquanto proposta avaliativa, a fase do feedback como realimentação da solução técnica viável, sua tônica, no sentido de preparar o estudante, fica bem marcada por suas claras preocupações na definição dos objetivos a serem obtidos com o processo de ensino podendo, portanto, influir no comportamento manifesto da sala de aula, proporcionando ao professor atitudes mais abertas e modernizantes.

9- Bibliografia

As indicações bibliográfias que estiverem precedidas pelo sinal ☐, correspondem aos softwares educativos .

9.1 - Fontes primárias

Atlas da História do Mundo. Folha de São Paulo, 1995.

BAUDRILLARD, J. Da sedução. Tradução Tania Pellegrin. São Paulo: Papirus, 1992.

- BOYER, C. B. História da matemática. Editora Edgard Blücher Ltda. São Paulo, 1974.
- GARCIA, W. E. Educação: visão teórica e prática pedagógica. São Paulo, McGraw-Hill, 1977.
- HOGBEN, Lancelot. Maravilhas da Matemática. Influência e função da matemática nos conhecimentos humanos. Editora Globo, Rio de Janeiro, 1956.
- IFRAH, Georges. OS NÚMEROS: a história de uma grande invenção. Editora Globo, Rio de Janeiro, 1991.
- KARPINSKI, Louis Charles. The history of arithmetic. Rand McNally & Company. Chicago, 1925.
- LUCCHESI, Claudio L. et al. Aspectos teóricos da computação. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
- MACEDO, L. Os jogos e sua importância na Escola. Cad. Pesq., São
- MACHADO, N. J. Matemática e realidade. São Paulo: Cortez, 1991.
- MENNINGER, Karl. Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers. The M.I.T. Press. Cambridge, 1970.
- OLIVEIRA, A.M. & SILVA, A. Biblioteca da Matemática Moderna. São Paulo : Lisa, 1980. PIAGET, J. O raciocínio da criança. Tradução de Valerie Rumjanek Chaves. Rio de Janeiro: Record, 1967.
- PIAGET, J. SZEMINSKA, A. A Gênese do número na criança. Tradução de Christiano Monteiro Oiticica. Rio de Janeiro : Zahar, 1975.
- PIAGET, J. O Estruturalismo. Tradução de Moacir Renato de Amorim. São Paulo: Difusão Européia, 1980.
- SMITH, David Eugene. History of Mathematics. New York : Dover Publication.
- SILVA, J.E.F e Wodewotzki, M.L.L. Auxílio de microcomputador na aprendizagem de Progressões Aritméticas. São Paulo: Anais do IV EPEM, 1996.
- ☐ SILVA, J.E.F. Enumeração. Trabalho não divulgado
- ☐ SILVA, J.E.F. Numeração. Trabalho não divulgado
- ☐ SILVA, J.E.F. Ordenação e cardinalidade. Trabalho não divulgado
- WEBB, N. & BRIARS, D. Assessment in mathematics classrooms, K-8. Teaching and learning mathematics in the 1990s. 108-117.

9.2 - Teoria e crítica

- BERLOQUIN, P. 100 jogos numéricos. Gradiva. Lisboa, 1991.
- BIGGE, M.L. Teorias de aprendizagem para professores. São Paulo: Cortez, 1992.
- BOLT, B. Atividades Matemáticas. Gradiva. Lisboa, 1991.
- BOLT, B. Mais atividades Matemáticas. Gradiva. Lisboa, 1992.
- BORTOLOTO, A. G. et al. Fazendo matemática nas séries iniciais. EDUCS. Caxias do Sul, 1992.
- CAMARGO, D. A. F. Desempenho operatório e desempenho escolar. Cad. Pesq., São Paulo (74): 47-56, agosto 1990.
- CENTURIÓN, M. Conteúdo e metodologia da Matemática: Números e operações. São Paulo: Scipione, 1994.
- CUNNINGHAM, W. F. Introdução à Educação: problemas Fundamentais, finalidades e técnicas. Porto Alegre: Globo, 1975.
- D'AUGUSTINE, C. H. Métodos modernos para o ensino da matemática. Ao Livro Técnico. Rio de Janeiro, 1976.
- DAVIS, C. & ESPÓSITO, Y.L. Papel e função do erro na avaliação escolar. Caderno de Pesquisa **74**. 71 -75 (1990)
- DEPRESBITÉRIS, L. O desafio da avaliação da aprendizagem: dos fundamentos a uma proposta inovadora. São Paulo: E.P.U., 1989.
- DUARTE, A. L. A. & CASTILHO, S. F. R. Metodologia da matemática: a aprendizagem significativa nas séries iniciais-Vol. 1. Vigília. Belo Horizonte, 1983.
- FLAVELL, J. H. La psicología evolutiva de Jean Piaget. Editorial Paidós. Buenos Aires, s/d.
- FRAGA, M. L. A matemática na escola Primária: uma observação do cotidiano. EPU. São Paulo, 1988.
- ☐ FRIEDMAN, D. et al. The math Blaster: in search of Spot team. Davidson & Associates. USA, 1993.
- FURTH, H.G. Piaget e o conhecimento. Rio de Janeiro: Forense, 1969.
- GROSSI, P. E. & Bordin, J. (Org.). Construtivismo Pós-Piagetiano: um novo paradigma sobre aprendizagem. Petrópolis: Vozes, 1993. GUELLI, O. Quero aprender matemática, 4 vols. Ática, São Paulo, 1995.
- JEFFREYS, M.V.C. A Educação: sua natureza e seu propósito. São Paulo, Cultrix, 1975.
- KANT, I. Crítica da razão pura. Tradução de Valério Rohden e Udo Baldur Moosburguer. - 4. ed. - São Paulo : Nova Cultural, 1991. LEDUR, E. A. et al. Metodologia do ensino-aprendizagem da Matemática. Unisinos. Rio Grande do Sul, s/d.

- LINS, R. C. Campos Semánticos y el Problema del significado en álgebra. Revista Didáctica de las matemáticas, n.1, p.57-74, jul. 1994.
- MOREIRA, M.A. Ensino, e aprendizagem: enfoque teóricos. São Paulo: Moraes, 1985.
- MORI, I. Viver e aprender matemática, 4 Vols. Saraiva. São Paulo, 1994.
- MORO, M. L. F. Crianças com crianças aprendendo: interação social e construção cognitiva. Cad. Pesq., São Paulo, n.79, p.31-43, nov 1991.
- PENTEADO, W.M.A. Psicologia do ensino. São Paulo: Papelivros, 1980.
- PEREIRA, M. G. B. et al. Matemática Brincando & construindo. 4 vols. Lê. Belo Horizonte, 1994.
- PERL, T. Math Rabbit. The Learning Company, 1987.
- SILVA, J.E.F. Resta 1. Trabalho apresentado na disciplina A informática aplicada na Educação Matemática. UNESP-Rio Claro, 1995.
- SOUZA, C.P. (org.) . Avaliação do rendimento escolar. São Paulo: Editora Papirus, 1993.

ⁱ Giuseppe Peano (1858-1932), matemático Italiano, considera como noções não definidas o número natural, o número 1 e o que é um sucessor e, diz, que os números naturais devem satisfazer aos seguintes axiomas:

- o número 1 é um número natural;
- para cada número natural a , existe exatamente um outro número chamado sucessor de a , que é representado por a' ;
- o número 1 não é sucessor de nenhum número natural
- se dois números naturais possuem um mesmo sucessor, então eles são iguais;
- se 1 pertence a um conjunto A e o fato de um número natural pertencer ao conjunto A , implica no seu sucessor a' também pertencer a A , então o conjunto A conterá todos os números naturais.