

***Sobre o desenvolvimento de
operações aritméticas básicas***

José Eduardo Ferreira da Silva (*)

Trabalho Apresentado ao
Prof. Dr. Sérgio Roberto Nobre na
Disciplina ***História da Matemática***

(*) Mestrando em Educação Matemática

UNESP/RIO Claro - 2º semestre de 1995

Índice

Introdução	03
------------------	----

1ª Parte

A numeração e a aritmética de civilizações antigas

1.1 - Na mesopotâmia	
1.1.1 - Nas terras de sumer e elam	04
1.1.2 - Na babilônia	08
1.2 - No Egito	09
1.3 - Na Índia	12
1.4 - Na China	15
1.5 - No México	
1.5.1 - Os astecas	18
1.5.2 - Os maias	19

2ª Parte

A numeração e aritmética das civilizações Grega e Romana

2.1- Na Grécia	
2.1.1 - Os minóicos e micênicos	20
2.1.2 - Os gregos	21
2.2 - Na Itália	23

3ª Parte

A Idade Máedia e a contribuição árabe

3.1 - A aritmética na Idade Média	26
3.2 - A contribuição árabe	28
3.3 - Os algarismos hindu na Europa	30
Conclusão	31
Bibliografia	32

Introdução

Em 1990, fui convidado pelo antigo Núcleo de Ensino e Ciências da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Juiz de Fora para um trabalho de assessoria de ensino, para professoras do ensino básico de uma escola municipal, também, de Juiz de Fora.

Dentre as dificuldades apontadas por estas professoras, com relação ao ensino de diversos conteúdos, o grupo decidiu que o mais imediato seria buscar alternativas que pudessem facilitar o processo de ensino/aprendizagem do sistema numérico decimal e das quatro operações aritméticas básicas.

Neste momento, foi sugerida uma avaliação das possibilidades do ábaco como uma ferramenta de auxílio no processo de ensino/aprendizagem do conteúdo proposto. Ressalte-se, que a principal argumentação em defesa desta proposta foi de que, a função do ábaco para os povos antigos foi similar ao da régua de cálculo para a civilização moderna até o advento das calculadoras eletrônicas, ou seja, facilitar e agilizar os cálculos.

Após algumas discussões, o grupo decidiu que uma armação com três estacas verticais, nas quais se enfiavam missangas, seria o modelo de ábaco para o trabalho, visto que, a construção do mesmo utilizando sucata é perfeitamente possível. Desta forma, a construção do instrumento poderia ser confiada aos próprios alunos, garantindo assim, que cada aluno teria em mãos o seu próprio ábaco. Ficou decidido, também, que esta atividade seria feita inicialmente com uma sala de 1ª série.

O próximo passo foi, então, levar a atividade de construção do ábaco para a sala de aula. Ressalte-se, que esta tarefa foi desenvolvida com muito empenho pela professora e pelos alunos.

A partir deste momento, uma grande questão se colocou: *de que maneira utilizar este instrumento no auxílio do processo de ensino/aprendizagem do sistema numérico decimal e das quatro operações aritméticas básicas?*

Para o processo de ensino/aprendizagem do sistema numérico decimal alguns autores (Bortoloto&Andreazza, 1992 e Centurion, 1994) sugerem atividades com ábacos similares ao desenvolvido em nosso trabalho, entretanto, no que diz respeito às quatro operações básicas a questão ficou em aberto.

Sendo assim, o objetivo deste trabalho é apresentar algumas considerações a respeito do que de fato é um ábaco, de que maneira foi utilizado pelo povos antigos e, também, o motivo que acabou por levar os povos ocidentais a abandonar definitivamente o uso deste instrumento, pois, acredito que sejam considerações é fundamentais em, quaisquer sérias, discussões a respeito das possibilidades do ábaco no processo de ensino/aprendizagem das operações aritméticas básicas.

Este trabalho consta basicamente de três partes. Na primeira parte é apresentado o sistema de numeração e, em alguns casos, alguns procedimentos aritméticos das principais civilizações antigas com exceção das civilizações grega e romana que são tratados na segunda parte. Esta exclusividade se deu, em primeiro lugar, pela

influência da cultura grega sobre a cultura romana e, em segundo, pela influência romana nos procedimentos aritméticos adotados na Europa durante o período da Idade Média. Finalmente, na terceira parte é apresentado alguns dos procedimentos aritméticos da Idade Média e a contribuição árabe no processo de abandono do ábaco pelos povos ocidentais.

1ª Parte: A Numeração e a aritmética de civilizações antigas

1.1 - Os mesopotâmicos

1.1.1- Nas terras de Sumer e Elam

Parece que uma das origens da necessidade de contagem pelo homem esta atrelada a expansão de certas sociedades. Esta expansão acarretou à necessidade de se fixar operações econômicas que acabaram tornando-se excessivamente numerosas e variadas para serem confiadas apenas a memória humana.

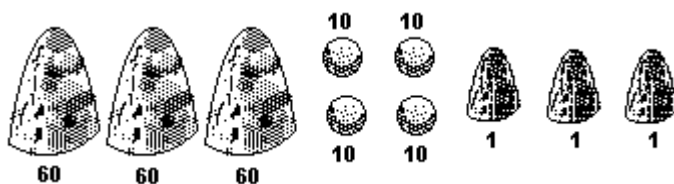
Para o desenvolvimento destes sistemas de numeração as pedras parecem ter desempenhado um papel importante nesta história. Por exemplo, quanto ao uso de uma determinada base, podemos atribuir a pedras de tamanhos diferentes, ordem de unidades diferentes.

Este procedimento, inegavelmente prático, porém, insuficientemente adaptado em função da dificuldade em se encontrar pedras de tamanho e formas regulares, parece ter sido contornada em meados do quarto milênio a.C. pelos responsáveis das antigas civilizações suméria e elamita. Estes elaboraram fichas de argila que modeladas segundo medidas e formas geométricas diversas eram utilizadas para representar unidades diferentes.¹

Os sumérios utilizaram um sistema de contagem sobre a base sessenta e tendo a dezena como unidade auxiliar representavam da seguinte forma:

- uma unidade simples por um pequeno cone;
- uma dezena por uma bolinha;
- sessenta unidades por um grande cone;

Assim, por exemplo, o número 223 era representado por três grandes cones, quatro bolinhas e três pequenos cones.



¹Estas fichas de argila foram encontradas em inúmeros sítios arqueológicos de Cartum a Jericó e desde a Turquia até o Irã e correspondem a um período que se estende do IX ao II milênio antes de nossa era. Os especialistas hoje as designam por *calculi*.

Os elamitas, por sua vez, contavam por dezenas no caso dos números usuais, aplicando a base sessenta no caso de unidades de ordens superiores, ou seja:

- uma unidade simples por um pequeno bastãozinho;
- uma dezena por uma bolinha;
- uma centena por um disco;
- três centenas por um cone;
- três milhares por um grande cone perfurado.

Porém, a necessidade de garantir a origem e a integridade de uma operação ou transação mostrou as limitações deste sistema de contabilidade. Era preciso lacrar o resultado das operações em invólucros de argila que eram quebrados quando necessário.

As recentes descobertas da delegação Arqueológica Francesa no Irã (DAFI), durante os trabalhos na acrópole de Susa², mostraram que o segundo estágio desta evolução está na idéia de simbolizar as fichas guardadas nos invólucros por diversas marcas de tamanhos e de formas diferentes, gravadas na parte externa de cada uma deles (os tablettes).

Assim, os sumérios passaram a simbolizar:

- o pequeno cone que representa a unidade por um talho fino;
- a bolinha marcando a dezena por uma pequena marca circular;
- o grande cone das sessentas unidades por um talho grosso;
- o seiscentos por um talho grosso munido de uma pequena marca circular;
- o 3.600 por uma grande marca circular;
- o 36.000 por uma grande marca circular munida de uma outra pequena.

e os elamitas, por sua vez, representavam da seguinte forma:

- uma unidade simples por um talho fino e alongado;
- uma dezena por uma pequena marca circular;
- uma centena por uma grande marca circular;
- três centenas por um talho grosso
- três milhares por um talho grosso e perfurado.

No entanto, estes tablettes contáveis ainda não comportam sinais de escritas, sendo as informações correspondentes, como nos invólucros, exclusivamente simbólicos e numéricos. As coisas designadas pelas operações são neles indicadas apenas por suas quantidades respectivas não sendo possível apreciar sua natureza.

² Cidade-estado situada na região do Elão em uma das principais rotas de comércio da época.

Outra limitação é que a operação propriamente dita não figura neles de maneira alguma.

A presença de novos signos nos tabletas ao lado dos números sumerianos por volta de 3200 a.C. marca o início de um novo estágio. Entretanto, o coroamento deste estágio se dá com a invenção da *fatura econômica*. Nelas, escreve-se de agora em diante nas duas faces de cada barra, colocando no "rosto" os detalhes de uma operação de contabilização e no "verso" o total e os "títulos" correspondentes.³

Na etapa seguinte estes signos passam a ter um valor pictórico mais amplo, não se limitando mais a sua simples significação visual direta. Mas neste estágio os signos ainda não exprimem os sons da linguagem articulada. Estamos, por assim dizer, na pré-história da escrita. A partir de 2800-2700 a.C., o sistema pictográfico sumério e seu homólogo elamita cumprem o passo decisivo no sentido da clareza, da precisão e da universalidade: eles são vinculados à língua falada. Trata-se, portanto, de um processo que permite anotar nuances e precisões difíceis ou mesmo impossíveis de marcar de outro modo. Assim sendo, observamos que a transcrição gráfica dos números precedendo a linguagem articulada garante que a invenção dos algarismos aconteceu muito antes da descoberta da escrita.

Mas neste primeiro estágio a invenção não serviu para fazer operações aritméticas: os algarismos só foram utilizados para memorizar quantidades e enumerações, sendo os cálculos efetuados então de maneira concreta, ou seja, para efetuar adições, subtrações, multiplicações ou divisões, os mesopotâmicos ainda utilizavam nesta época os velhos *calculi* de outrora que apesar de ultrapassados há muito no sistema de registros foi conservado para a prática das operações aritméticas, pois os algarismos de então nunca permitiram a prática de um "cálculo escrito". A título de ilustração, vamos apresentar uma solução para o seguinte problema aritmético:

Como dividir 3132 silas⁴ de cevada para três indivíduos de forma que todos recebam, no final, a mesma quantidade de cevada?

Para respeitarmos as limitações impostas pelo instrumento de cálculo destes povos, vamos representar o número 3132 dentro de um padrão similar ao utilizado na época pelos sumérios. Para isto, representaremos o número seiscentos por um quadrado, o número sessenta por um triângulo, o número dez por um círculo e a unidade por um traço. Logo, o número 3132 será doravante representado da seguinte forma:



³ Este sistema é denominado pelos especialistas por *sistema pictográfico*. Entretanto, esses desenhos ainda não passam de "imagens signos", tendo por função significar o que representam visualmente, não se tratando ainda de uma escrita no sentido estrito da palavra.

⁴ A *sila* era uma unidade de medida de capacidade utilizada pelos sumérios. Corresponde a 0,842 do litro atual.

A fim de facilitar, dividiremos o processo em quatro passos:

Passo 1: Dividir os cinco quadrados para os três indivíduos. Assim, caberá a cada um quadrado de cevada e sobrarão dois quadrados, ou seja:

$$\blacksquare\blacksquare\blacksquare - 1^{\text{a}} \text{ grupo}$$

$$\blacksquare\blacksquare - 1^{\text{a}} \text{ resto}$$

Passo 2: Transformar os quadrados restantes em triângulos, somar o resultado aos triângulos já existentes e efetuar novamente a divisão.

$$\blacktriangle + \blacktriangle + \blacksquare + \blacksquare = \blacktriangle + \blacktriangle + 10.\blacktriangle + 10.\blacktriangle = 22.\blacktriangle$$

$\blacktriangle$

$\blacktriangle$

$\blacktriangle$

$\blacktriangle$

$\blacktriangle$

$\blacktriangle$

$\blacktriangle$

}

$2^{\text{a}} \text{ grupo}$

$\blacktriangle$

-

$2^{\text{a}} \text{ resto}$

Passo 3: Transformar o triângulo existente em círculos, adicionar o resultado ao círculo já existente e novamente dividir por três.

$$\blacktriangle + \bullet = 6.\bullet + \bullet = 7.\bullet$$

$\bullet$

$\bullet$

$\bullet$

$\bullet$

$\bullet$

}

$3^{\text{a}} \text{ grupo}$

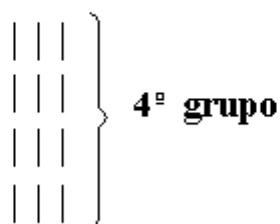
$\bullet$

-

$3^{\text{a}} \text{ resto}$

Passo 4: Transformar o círculo em unidades, adicionar o resultado às unidades já existentes e efetuar a última divisão.

$$\bullet + | + | = 10. | + | + | = 12.$$



Logo, o resultado de nossa divisão será dado pela união dos resultados parciais encontrados em cada um dos passos anteriores, ou seja, a cada indivíduo caberá o seguinte número de silas de cevada:

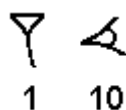


1.1.2 - Na Babilônia

O desenvolvimento deste sistema de numeração, pelos matemáticos e astrônomos da mesopotâmia, vai alcançar a maturidade pouco antes da época do rei Hamurabi⁵ (1782-1750 a.C.) e foi, sem dúvida, um dos mais admiráveis da antigüidade. Contrariamente à maioria dos sistemas da época, o valor de seus algarismos era de fato determinado pela sua posição na escrita dos números.

Mas em vez de ser decimal como nosso sistema posicional atual, era fundada na base sexagesimal. Os números de 1 à 59 formavam as unidades de primeira ordem; os de sessenta correspondiam às unidades de segunda ordem; os múltiplos de 60 correspondiam às unidades de terceira ordem; e assim por diante.

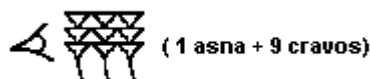
Esta numeração utilizava propriamente apenas dois símbolos⁶: um "cravo" vertical representando a unidade e uma "asna" associada ao número 10.



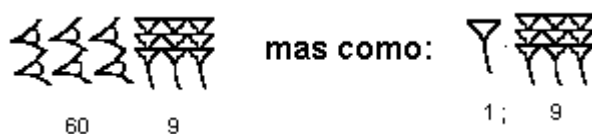
Os números de 1 à 59 eram representados do modo aditivo, repetindo cada um desses dois signos tantas vezes quantas fosse necessário. Assim para escrever 19 , temos:

⁵ É possível que este sistema tenha surgido a partir da união do sistema sumério com o sistema elamita, pois através da história povos de línguas semita do deserto sírio se infiltraram na Mesopotâmia. No fim do 3º milênio, as cidades-estado submeteram-se às incursões dos amoritas, vindo do ocidente. Ur III caiu sob pressão dos novos invasores semíticos, mas o golpe de misericórdia foi a invasão dos elamitas vindo de Susa. Apesar da supremacia inicial exercida pela Assíria, a Babilônia pouco depois passou a ser o principal centro religioso da Mesopotâmia. Sua hegemonia durou 200 anos e chegou ao fim com a invasão dos hititas em 1595.

⁶Os signos utilizavam uma grafia denominada cuneiforme em virtude de seu aspecto em forma de cunhas e de cravos.

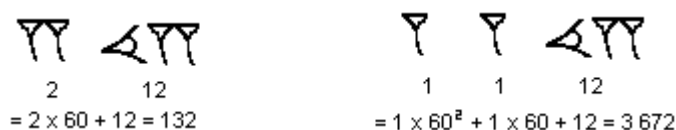


Mas, para além de 59, a escrita se tornava posicional. O número 69, por exemplo, não era escrito como



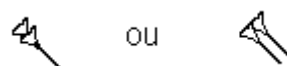
Desta forma, a numeração babilônica era inteiramente análoga ao nosso sistema atual, dele diferindo apenas pela natureza de sua base e pelo modo de formação de seus algarismos, ou seja era fundada no princípio aditivo no interior de cada ordem de unidades, o que gerou inúmeras ambigüidades e deu origem a muitos erros. Assim, a notação do número 2 podia prestar-se a confusão com a do número 61, o 25 com 615, etc

Conscientes da dificuldade, certos escribas mesopotâmicos introduziram um espaço vazio para marcar bem a passagem de uma ordem sexagesimal à seguinte.



Mas nem assim o problema foi resolvido, pois este espaço muitas vezes era esquecido por escribas distraídos ou pouco conscienciosos. Além disso, era difícil simbolizar desse modo a ausência de duas ou várias ordens de unidades consecutivas.

Finalmente, todas estas ambigüidades desapareceram no século III a.C., quando foi introduzido para significar a ausência das unidades sexagesimais de uma determinada casa, os signos:



Nascia assim o zero babilônico, talvez o mais antigo da história. Entretanto, de acordo com Ifrah (1989) o zero não parece ter sido concebido pelos sábios da Babilônia como uma quantidade, ou seja, enquanto "*número nulo*" sendo, talvez, uma das razões pelas quais os mesmos não tenham avançado em relação ao cálculo escrito.

1.2 - No Egito

No alvorecer do terceiro milênio antes de nossa era os egípcios também se viram em condições iniciais psicológicas, sociológicas e econômicas favoráveis a

invenção dos algarismos e da escrita⁷. No entanto, o sistema de numeração egípcio além de não apresentar qualquer semelhança gráfica com os sistemas sumérios e elamitas era, também, diferente sob o ponto de vista matemático, pois, era fundado numa base estritamente decimal.

Desde seu surgimento, a numeração egípcia permite a representação dos números além do milhão: ela compreende um hieroglifo especial para indicar a unidade e cada uma de suas potências de dez. Assim:

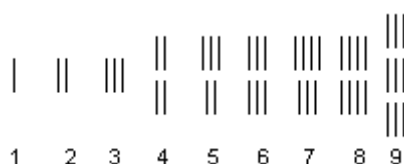
- o algarismo para a unidade é um pequeno traço vertical;
- o da dezena é um signo em forma de asa;
- a centena é representada por uma espiral mais ou menos enrolada;
- o milhão é figurado por uma flor de lotus com seu caule;
- a dezena de milhar, pelo desenho de uma dedo erguido;
- a centena de milhar por uma rã;
- o milhão, por um homem ajoelhado erguendo o braço.

Um exemplo foi encontrado na cidade em Hierakleopolis figurado numa estátua que foi erigida em honra de um rei chamado Khâsekhem. Nesta encontramos a seguinte escrita para o número 47.209 indicando a quantidade de inimigos massacrados por este soberano.



Para representar um determinado número, os egípcios se limitavam, assim, a repetir o algarismo da mais alta potência de 10 nele contida: reproduziam primeiro as unidades da maior ordem decimal, em seguida as de ordem imediatamente inferior, e assim por diante até as unidades mais simples.

Entretanto, é somente a partir do século XXVII a.C. que o desenho desses hieroglifos se tornará mais minucioso e regular. E, para evitar a acumulação numa mesma linha de vários algarismos de uma mesma classe de unidades pequenos grupos de dois, três ou quatro signos idênticos serão freqüentemente formados em uma ou duas linhas superpostas.



Apesar de ainda bastante primitiva, a numeração egípcia, talvez por estar fundamentada numa base estritamente decimal, apresentou algumas possibilidades

⁷ Esta escrita, denominada *hieroglífica*, se caracteriza por imagens mais ou menos realistas representando seres ou objetos de todo tipo.

$$1 + 2 + 16 + 64 = 83$$

Após marcarmos esses números da coluna esquerda com um pequeno sinal, seguimos, agora efetuando as duplicação na coluna da direita marcando, também com um pequeno sinal, aquelas duplicações em que o correspondente da esquerda estiverem marcados. Isto é:

* 1		15	*
* 2		30	*
4		60	
8		120	
* 16		240	*
32		480	
* 64		960	*

O resultado será encontrado pela soma dos valores marcados na coluna da direita, ou seja:

$$15 + 30 + 240 + 960 = 83 \times 15$$

1.3 - Na Índia

Foi no norte da Índia, por volta do século V da era Cristã, que nasceu o ancestral de nosso sistema moderno e que foram estabelecidas as bases do cálculo escrito tal como é praticado hoje em dia.

Como em outras civilizações, os habitantes da Índia setentrional usaram por um longo tempo uma numeração escrita muito rudimentar, como nos mostram as inúmeras inscrições desde o século III a. C.. Porém, desde o início esta numeração sempre apresentou uma característica diferente das demais. Seus nove primeiros algarismos eram signos independentes de qualquer intuição sensível: eram distintos e não buscavam evocar visualmente os números correspondentes.

Mas, não submetendo-se ainda a regra de posição, estes algarismos não foram operacionais como os nossos. De base decimal esta numeração repousava, de fato, sobre o princípio da adição e atribuía um algarismo especial a cada um dos elementos do conjunto: { 1, 2, 3, ..., 9, 10, 20, 30, ..., 90, 100, 200, ..., 900, 1000, 2000, ... } sendo, portanto, muito limitada não só com relação as possibilidades operatórias como, também, nas possibilidades de se representar números grandes (não era possível passar de 99.999)

A impossibilidade representacional, começou a ser vencida a partir do momento em que os sábios hindus recorreram ao artifício de representar os números "por extenso", isto é, atribuíram um nome particular a cada um dos nove primeiros números e um nome particular à dezena e a cada uma de suas potências.

1 - eka	6 - sat	100 - sata
2 - dvi	7 - sapta	1.000 - sahasra
3 - tri	8 - asta	10.000 - ayuta
4 - catur	9 - nava	100.000 - laksa
5 - pañca	10 - dasa	

As grandes diferenças de nosso atual sistema eram a maneira pela qual exprimiam os números - escreviam os números na ordem das potências ascendentes de sua base, começando pelas unidades simples correspondentes - e atribuíam às diferentes potências de dez nomes totalmente independentes umas das outras. Assim, o número 14235 era dado da seguinte forma:

pañca tri dasa dvi sata catur sahasra eka ayuta
cinco, três dezenas, duas centenas, quatro mil, uma dezena da milhar

Possivelmente com a finalidade de abreviar, por volta do século V de nossa era, os matemáticos hindus suprimiram, no corpo dos números expressos deste modo, qualquer menção aos nomes indicadores da base e suas diversas potências. Desta maneira, o número 14235 foi a partir de então expresso por um enunciado do tipo:

"cinco.três.dois.quatro.um"

No entanto, se por um lado este expediente apresentava vantagens e facilidades, por outro apresentou uma grande dificuldade em se representar números com, por exemplo: 301. Entretanto, ao que parece os sábios hindus não levaram muito tempo para contornar este obstáculo. Recorreram à palavra sunya, que significa "vazio" para resolver de uma vez por todas o problema. Assim, o número 301 foi enunciado da seguinte forma:

eka śūnya tri

Com este expediente, os hindus além de eliminarem qualquer possibilidade de equívoco, conseguiram os ingredientes necessários à constituição da numeração moderna, ou seja:

- para as unidades de 1 à 9, eles dispunham realmente de algarismos distintos e independentes de qualquer intuição visual direta;

- eles já conheciam o princípio de posição;
- e acabavam de descobrir o zero.

Foi a reunião destas três idéias que produziu o milagre. A dupla descoberta da regra de posição e do zero data no máximo do século V de nossa era. Seus primeiros exemplos se encontram num tratado de cosmologia com o título de Lokavibhāga, publicado por membros do movimento religioso hindu jainista em 25 de agosto de 458 do calendário juliano⁸.

A partir de então, o sistema conheceu um considerável sucesso junto aos matemáticos e astrônomos hindus expandindo-se a partir do século VI até fora das fronteiras da Índia, sendo largamente empregado pelos gravadores de inscrições em pedra das civilizações khmer, cham, javanesa etc.

Entretanto, a ciência hindu não exerceu diretamente sua influência na Europa. Foi preciso mais de um milênio para que estas novidades revolucionárias fossem definitivamente aceitas pelo mundo ocidental.

Os sábios hindus antes de inventar o antecessor de nosso cálculo e devido as insuficiências de sua numeração escrita inicial, recorreram a instrumentos aritméticos auxiliares para efetuar os seus cálculos.

Eles utilizavam um retângulo dividido em colunas traçado sobre a areia, sendo a primeira coluna da direita associada às unidades simples, a seguinte às das dezenas, etc. e para operar, utilizavam os nove primeiros algarismos de sua velha notação que eram traçados sobre a areia, nas colunas, de acordo com as necessidades dos cálculos, sendo que, apagava-se a cada vez os algarismos que eram transportados.

Como ilustração, vamos efetuar o produto 325×28 com a ajuda do método inicial dos hindus.

1ª Etapa

Passo 1: traçar na areia cinco linhas paralelas, dispondo em seguida os números 325 e 28 da seguinte forma:

	3	2	5
2	8		

Passo 2: em seguida, multiplica-se o 3 de cima pelo dois de baixo, colocando o resultado 6, à esquerda do número 3.

6	3	2	5
2	8		

Passo 3: multiplica-se o 3 de cima pelo 8 de baixo. Como o resultado é 24, apaga-se o 3 de cima substituindo-o pelo 4 e acrescenta-se ao seis as 2 unidades de dezenas correspondente ao 24.

8	4	2	5
2	8		

⁸ Esta data é segura, pois está claramente indicada no texto por sua equivalente numa representação hindu então em uso; além disso, ela é confirmada por indicações relativas a determinados dados astronômicos hoje conhecidos e datados.

2ª Etapa

Deslocar o número 26 uma casa para a direita, repetindo-se os procedimentos anteriores, porém, desta vez com o número 2 de cima.

8	4	2	5
	2	8	

8	8	2	5
	2	8	

8	9	6	5
	2	8	

3ª Etapa

Deslocar novamente o número 28 uma casa para a direita, e operá-lo ao número 5.

8	9	6	5
		2	8

9		6	5
		2	8

9	1		
		2	8

1.4 - Na China

Os chineses parecem ter resolvido seu problema de notação numérica, dentro das necessidades do momento de uma forma diferente. A mais de três mil anos, forjaram uma numeração escrita da qual se servem até hoje.

Trata-se de uma numeração alfabética, pois os signos utilizados não constituem algarismos propriamente dito, mas caracteres completamente ordinários da escrita chinesa. Trata-se de uma das representações gráficas das treze palavras monosilábicas existentes na língua chinesa para designar as nove unidades e as quatro primeiras potências de 10.

Para cada um desses treze caracteres existem hoje várias grafias, pronunciadas evidentemente da mesma maneira, mas correspondendo aos diversos estilos da escrita chinesa e variando de acordo com seu uso. Na figura abaixo apresentamos as formas consideradas clássicas.

一 二 三 四 五 六 七 八 九 十
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

No entanto a grande característica desta escrita numérica está na representação dos números intermediários, pois, para escrevê-los procede-se por adição e multiplicação. Os números são sempre expressos do mesmo modo a partir dos treze caracteres fundamentais.

Para os números de 11 à 19, utiliza-se o signo da dezena e se coloca sucessivamente a sua direita os algarismos das unidades correspondentes:

十一
10 + 1

十四
10 + 5

十九
10 + 9

O vinte é representado colocando o número 2 à esquerda do signo da dezena:

五十
5 x 10

Para os números de 21 a 29, procede-se do mesmo modo, colocando sucessivamente à direita da representação do número 20 os algarismos das unidades correspondentes:

二十一
2 x 10 + 1

五十七
5 x 10 + 7

A utilização deste princípio apresenta a significativa vantagem de evitar repetições fastidiosas de signos idênticos, proporcionando aos chineses ampliar consideravelmente os recursos de sua numeração escrita. Bastou-lhes considerar a dezena de milhar como uma nova base de contagem para que, recorrendo à regra multiplicativa, representassem as potências de dez superiores ou iguais a 10.000.

Mas apesar deste inegável avanço, não era possível representar todos os números inteiros, isto é eles podiam expressar qualquer número desde que menor ou igual à 999 bilhões. Além disto, nem sempre era possível calcular por escrito, como atualmente. Dois passos importantes necessitaria ser dado para que esta numeração pudesse adaptar-se à prática de operações aritméticas. O princípio posicional e o zero.

A solução para parte destes problemas surgiu dois mil anos após os matemáticos da Babilônia⁹, os chineses desenvolveram um engenhoso sistema de numeração escrita, porém, de maneira totalmente independente do povo da Mesopotâmia.

Eles combinaram, sobre o princípio da posição, barras verticais e horizontais. Sua base era decimal, mas conferiam, ainda, uma representação ideográfica às nove unidades simples.


 1 2 3 4 5 6 7 8 9

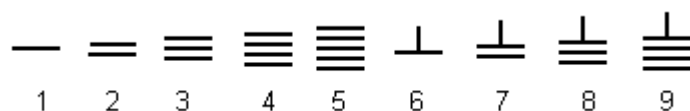
Devemos observar, que ao entrar em composição com uma, duas, três ou quatro barras verticais para representar os números 6, 7, 8 e 9, o traço horizontal tinha, assim, 5 como valor simbólico.

A partir daí os números compostos de duas ou mais ordens de unidades eram representados segundo o princípio de posição.

⁹Na época da dinastia Han (séc. II a.C - III a.C.)

Exemplo: 7 346 $\overline{\text{II}} \text{ III } \text{IIII } \text{T}$

A fim de contornar os obstáculos inerentes a este sistema, como por exemplo as inúmeras ambigüidades que causou, os sábios chineses introduziram uma segunda notação para as unidades simples, formando signos análogos aos precedentes, mas desta vez com barras horizontais:

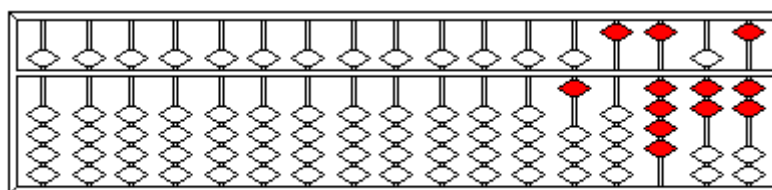


Assim, alternando os algarismos da primeira série com as da segunda, eles sanaram, de um modo mais elegante que os babilônicos, algumas possibilidades de ambigüidades.

Exemplo: 7 346 $\perp \text{ III } \equiv \text{T}$

No entanto, a possibilidade de um cálculo escrito não se concretizou, talvez pela ausência de um signo para indicar as unidades em falta de uma determinada ordem.

Para os seus cálculos aritméticos os chineses acabaram por adotar a partir do século XII uma espécie de contador mecânico denominado suan pan que introduzido no Japão por volta do século XVI originou o soroban que é, ainda, utilizado pelos chineses e japoneses nos dias atuais. Este contador se constitui de uma armação retangular com duas colunas. Uma série de varetas contendo cinco missangas são afixadas perpendicularmente às colunas de forma que a primeira coluna contenha uma missanga e a segunda coluna quatro missangas. Estas colunas representam, da esquerda para a direita as unidades, as dezenas, etc. Assim, para registrar um determinado número ou efetuar um determinado cálculo basta ao operador deslizar, de acordo com princípios bem definidos, as missangas para baixo ou para cima, de acordo com a necessidade.

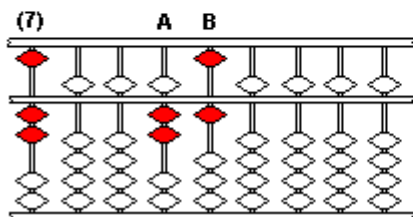


O número 15 927 representado no soroban

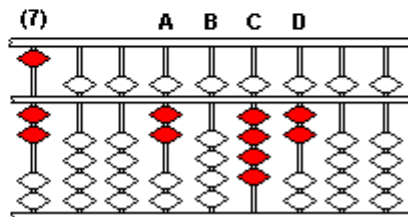
Para ilustrar o seu funcionamento nas operações aritméticas, vamos efetuar o produto 7×26 , utilizando o soroban.

Como em toda operação com este tipo de instrumento, uma forte noção do valor posicional, por parte do operador, é fundamental.

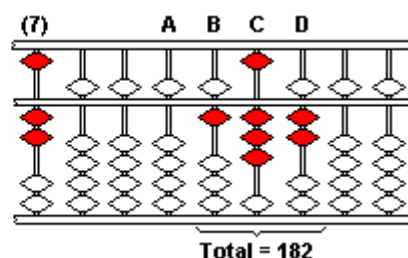
Primeiro passo: o fator 26 deve ser colocado a direita do fator 7 (colunas A e B).



Segundo passo: Efetuar o produto 7x6 colocando o resultado à partir da coluna D.



Terceiro passo: Efetuar o produto 7x2(0) o qual deve ser colocado a partir da coluna C, combinado a quantidade já existente nesta coluna.



1.5 - No México

1.5.1 - Os astecas

Do outro lado do mundo, mas trinta e cinco séculos mais tarde, a *civilização asteca* alcançou os mesmos resultados. Tendo-se desenvolvido no México entre os séculos XIV e XVI de nossa era, antes da chegada dos conquistadores espanhóis¹⁰.

No entanto, a numeração asteca repousava, por sua vez, sobre a base vinte a só tinha quatro algarismo:

- um ponto ou um círculo para a unidade;
- uma espécie de machado para a base vinte;
- uma pena para o número 400;
- um saco cheio de grãos para 8.000.

Como a numeração asteca se fundava no princípio aditivo e só atribuía signo especial à unidade e a cada uma das potências de sua base, observamos uma inegável identidade de concepção intelectual com o sistema numérico egípcio. As únicas diferenças em relação ao sistema egípcio estão no desenho de seus algarismo e na natureza de sua base, que foi vigesimal em vez de decimal.

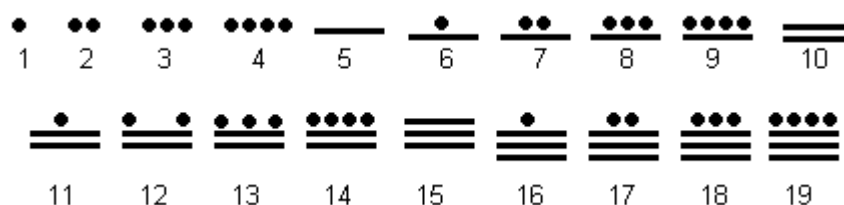
¹⁰ O que sabemos deve-se a um certo número de manuscritos aos quais os especialistas dão o nome de *codex*, cuja maior parte foi redigida após a conquista espanhola.

1.5.2 - Os maias

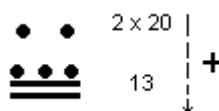
Dentre todas as culturas pré-colombianas da América Central, a civilização maia foi a mais prodigiosa, e sua influência sobre elas (principalmente sobre os astecas) foi comparável à dos gregos sobre os romanos.

Independente de qualquer influência estrangeira, as mesmas descobertas, em relação ao sistema numérico posicional e ao zero, foram feitas alguns séculos mais tarde pelos sacerdotes e astrônomos maias.

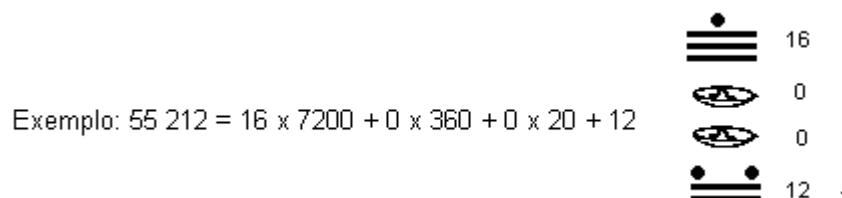
É o que testemunham os manuscritos maias que hoje dispomos, principalmente o *Codex de Dresden*. Eles revelam a existência, entre os sacerdotes maias, de um sistema de base vinte munido de um zero, no qual o valor dos algarismos é determinado pela posição ocupada na escrita dos números.



Cada número superior a 20 era escrito em seguida numa coluna vertical, com uma fileira para cada ordem de unidades. Para números compostos de duas ordens, colocava-se o algarismo das unidades simples na parte de baixo e o algarismo das vintenatas na de cima. Assim, 53 ($2 \times 20 + 13$) era escrito do seguinte modo:



E, para cada algarismo que ficasse em sua posição no caso em que as unidades de uma determinada ordem viessem a faltar, os sábios inventaram o zero.



Infelizmente, este sistema sempre esteve calcado no sistema de expressão das datas, e concebido unicamente para satisfazer às exigências da astronomia e

da contagem do tempo, esta numeração conservou para sua terceira posição o valor da terceira unidade do tempo, ou seja 360. Assim, em vez de indicar nesta posição os múltiplos de $20 \times 20 = 400$, ela exprimiu apenas os $18 \times 20 = 360$ tornando este

sistema, portanto, impróprio para a prática das operações e para qualquer desenvolvimento matemático.

2ª Parte : A numeração e a aritmética das civilizações grega e romana

2.1 - Os Gregos

2.1.1- Os minóicos e os micênicos

Onze ou doze séculos após o Egito faraônico, uma outra civilização avançada se viu também em condições iniciais favoráveis à invenção dos algarismos e da escrita - a que se desenvolveu na ilha de Creta entre 2200 e 1400 aproximadamente antes de nossa era, e que os arqueólogos chamam de *civilização minóica*¹¹.

Para isto os cretenses dispõem de três tipos diferentes de escrita:

- a *hieroglífica*, empregada quase exclusivamente nos palácios, do ano 2000 até 1600 a.C. aproximadamente.

- a *linear A*, que derivará da primeira, mas cujos signos serão desenhos muito mais esquemáticos. Será atestada em Creta, entre 1700 a 1400 a.C., e se difundirá tanto nos meios administrativos ou religiosos junto à comunidade.

- a *linear B*, que resultará de um remanejamento da precedente e que servirá para anotar não mais a língua minóica, mas um dialeto grego arcaico (o micênio). Utilizada entre 1350 e 1200 a.C., após o desenvolvimento definitivo da civilização minóica e depois da invasão da ilha pelos micenianos, difundindo-se não apenas em Creta, mas também no continente helênico¹².

	1	10	100	1 000	10 000
Sistema hieroglífico					
					
					
					
					
Sistema linear A					
Sistema linear B					

¹¹ Minóica é uma palavra derivada do nome Minos, um legendário primeiro rei da ilha segundo a mitologia grega.

¹²Tudo o que sabemos se deve às escavações empreendidas a partir do final do século passado nos sítios arqueológicos de Cnossos, Mallia, Phaestos e Hagia Triada, assim como nos sítios gregos de Miscenas, Tirinto e Pilos.

Depois dos cretenses, os micênicos conservaram estes signos, introduzindo, contudo, um algarismo suplementar para 10.000. Mas além dessas modificações gráficas, o princípio da numeração cretense permaneceu sempre o mesmo. Partindo dos algarismos de uma de outra dessas séries, os números intermediários sempre foram expressos repetindo cada um deles tantas vezes quantas necessário. Além disso, a escrita de cada número era geralmente feita na ordem dos valores decrescentes, a partir do algarismo representativo da mais alta potência de 10. Sendo assim, podemos observar que salvo os grafismos dos algarismos, esta notação numérica foi idêntica à numeração hieroglífica egípcia.

2.1.2- Os gregos

Influenciados provavelmente pelos micênicos, os gregos utilizavam por volta dos séculos IX-VIII a.C., uma notação numérica com as mesmas características do sistema cretense.

Mas, como os sistemas egípcio, cretense ou asteca, esta numeração escrita teve o inconveniente da sua simplicidade, pois, por menor que fosse a representação numérica, ela exigia uma repetição exagerada de signos idênticos.

A partir do século VI a.C., eles simplificaram sua notação numérica introduzindo progressivamente um algarismo especial para 5, um para 50, um outro para 500, e assim por diante. Ao mesmo tempo, abandonaram pouco a pouco as antigas formas gráficas de seus números para substituí-las por letras alfabéticas (o princípio da acrofonia¹³). Assim, eles passaram a representar:

- a unidade por um traço vertical;
- o número 5 pela antiga letra *Pi*;
- a dezena pela letra *delta*;
- o número 50 pela combinação das letras *Pi* e *delta*;
- a centena pela letra *eta*;
- o número por uma combinação das letras *Pi* e *eta*;
- a milhar pela letra *khi*,
- o número 5.000 por uma combinação das letras *Pi* e *Khi*;
- o número 10.000 pela letra *Mu*;
- e, finalmente, o número 50.000 pela combinação *Pi* e *Mu*.

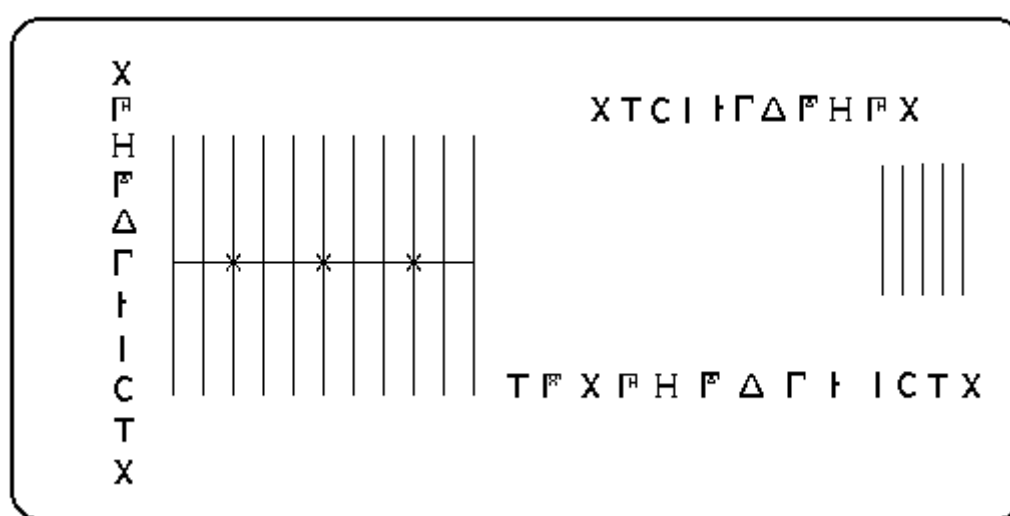
┆	Π	Δ	ΠΔ	Η	ΠΗ	Χ	ΠΧ	Μ	ΠΜ
1	5	10	50	100	500	1000	5.000	10.000	50.000

¹³Consiste em se representar os números por letras alfabéticas correspondendo cada uma à inicial de uma designação de número.

Deste modo, os gregos conseguiram forjar um sistema capaz de reduzir, de forma substancial, as repetições até então necessárias para a representação numérica.

No entanto, esta evolução marcou uma regressão na história do cálculo, pois ao introduzir algarismos suplementares na sua lista inicial, os gregos a privaram de qualquer possibilidade operatória.

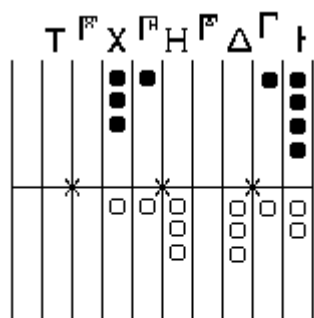
Portanto, suas necessidades de cálculo foram supridas através da utilização de instrumentos os quais passaram a ser denominados *abákion*¹⁴. Um destes instrumentos utilizado para o cálculo na Grécia, é hoje conhecido como *tábua de Salamina*¹⁵. Consiste em basicamente dois grupos de linhas paralelas com três grupos de letras que indicam o sistema de numeração grego.



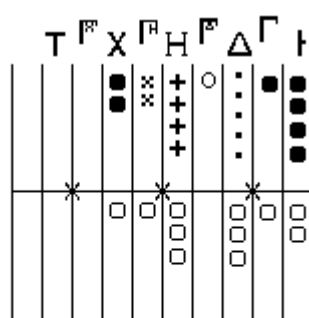
A fim de ilustrar, vamos efetuar 3509 - 1847, utilizando a tábua de Salamina.

¹⁴O termo abakion originou-se da palavra ábax que significa uma travessa redonda ou mesa sem pernas. Apesar de possuir finalidades diferentes, conforme a época, é possível que em determinado momento tenha servido para os primeiros delineamentos da geometria e da escrita. Isto era feito, após cobrir a travessa como uma tênue camada de areia ou cera.

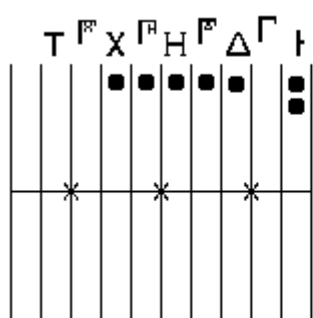
¹⁵Este documento - primeiro interpretado erroneamente como uma espécie de jogo - era na verdade um instrumento de cálculo. Utilizado por volta do século V a.C., o único exemplar existente encontra-se preservado no Museu Nacional de Atenas.



1º passo: distribuir na primeira linha o número 3509 (●) e na segunda linha o número 1847 (□).



2º passo: realocar 1.000 unidades em duas cinco-centenas (x), uma cinco-centena em cinco centenas (+), uma centena em uma cinco-dezena (O) e cinco dezenas (.).



3º passo: retirar em cada uma das colunas da linha superior, a quantidade existente em cada em cada coluna da linha inferior.

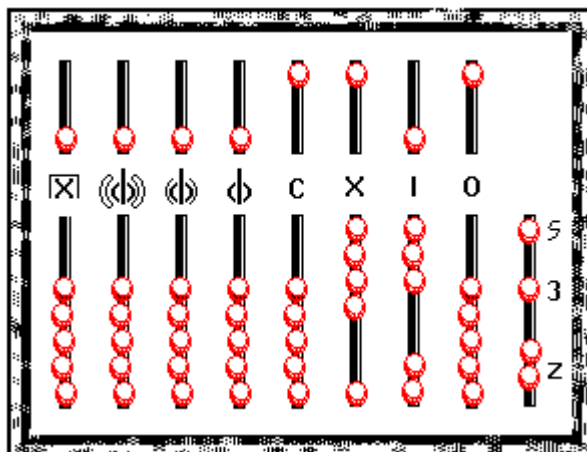
No entanto, os gregos, talvez reconhecendo as limitações deste tipo de instrumento para a multiplicação e divisão, acabaram por desenvolver algumas técnicas para agilizar o cálculo destas operações. Por exemplo, Archimedes e Diofantus para fazer os seus cálculos, adaptaram as representações numéricas ao alfabeto grego.

$$\begin{array}{r}
 35 \\
 \times 42 \\
 \hline
 1200 \quad 60 \\
 200 \quad 10 \\
 \hline
 1400 + 70 = 1470
 \end{array}$$

A utilização desta técnica para o produto só tornou-se possível após a adoção de um meio alternativo para a representação numérica.

2.2 - Na Itália

Como nos signos da numeração grega, os algarismos romanos não permitiam que seus usuários fizessem cálculos, pois assim como os gregos "acrofônicos", não se destinavam a efetuar operações aritméticas, mas a fazer abreviações para anotar e reter números. É por isto que os contadores romanos sempre recorreram a ábacos de fichas para a prática do cálculo.



A partir daí, as representações numéricas nesse gênero de instrumento eram feitas com facilidade. Tratava-se, então, de uma calculadora inteiramente análoga aos contadores mecânicos como o suan pan e o soroban²⁰ que ainda hoje são utilizados no Extremo Oriente.

No entanto, o fato de os cálculos mais complicados serem confiados a um outro tipo de instrumento - o ábaco de fichas - levá-nos a crer que os romanos não foram capazes de perceber as possibilidades de seu pequeno instrumento e, também, pode justificar a preferência dos povos ocidentais da Idade Média, herdeiros diretos da civilização romana, por estas antigas tábuas de cálculo.

3ª Parte: A aritmética na Idade Média e a contribuição árabe

3.1 - A aritmética na Idade média

O período em torno de 500 d.C. testemunhou a eclosão de revoluções sociais e políticas em todo o mundo eurasiático, quando os nômades provenientes das estepes da Ásia abateram-se sobre os núcleos das civilizações existentes. Ainda que as conquistas do período clássico não tenham desaparecido completamente, os contatos entre a China e o Ocidente, entre o Norte da África e a Itália e entre Bizâncio e Europa Ocidental reduziram-se de forma considerável. Nos séculos seguintes cada região teve que contar apenas com os seus próprios recursos e foi forçada a defender-se sozinha. Esse período, na Europa Ocidental, é conhecido como Idade Média.

Tal descrição pode ser apropriada em termos da história europeia, mas não se aplica quando uma perspectiva mais abrangente da história mundial é adotada. Por essa época, um dos acontecimentos excepcionais que dominaram a cena foi a ascensão e expansão do Islã. No entanto, antes de analisarmos as influências árabes no processo

²⁰Vide páginas 20 e 21.

de universalização do sistema numérico do hindus, vamos conhecer um pouco das técnicas operatórias utilizadas na Europa.

A aritmética prática, por seu lado, consistia essencialmente no uso da numeração arcaica do povo romano, tanto no modo de contar com os dedos quanto na prática de operações através de pedras ou de fichas nos velhos Abacus, também legados pela civilização moderna.

Para os povos ocidentais, os ábacos mais correntes foram tábuas ou pranchas com divisões em diversas linhas ou colunas paralelas separando as diferentes ordens de numeração. Para representar números ou para efetuar operações, ali se colocavam pedras ou fichas valendo uma unidade simples cada uma. Peças que os gregos denominavam de *psephoi* e os romanos, de *calculi*.

Estas tábuas de contar facilitavam a prática da adição e subtração, mas não se mostraram muito úteis às multiplicações e divisões. Portanto, para estas operações os calculadores se valiam de alguns métodos que por transformar estas operações em somas e subtrações facilitavam, assim, o seu trabalho no ábaco. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1 : multiplicação

21	15 +
10	30
5	60 +
2	120
1	240 +

Os abacistas para efetuar o produto 21×15 utilizavam os seguintes procedimentos:

- coloca-se os fatores em duas colunas consecutivas;
- dividi-se o fator da esquerda por 2, sendo que no caso dos números ímpares, considera-se como resultado o maior inteiro, menor do que o quociente, de fato e assim, sucessivamente, até obter o quociente 1;
- em seguida, duplica-se, sucessivamente, o fator da direita de maneira que cada quociente, da esquerda, tenha um dobro na coluna da direita, destacando-se aqueles em que o quociente, correspondente, é ímpar;
- finalmente, o produto 21×15 será dado pela soma dos produtos em destaque, ou seja:

$$21 \times 15 = 15 + 60 + 240$$

Exemplo 2 : divisão

Para efetuar a divisão 7825 por 43, o divisor 43 sofre um incremento de 7 para completar meia centena, isto é, $43 + 7 = 50$. Em seguida, divide-se o dividendo por 50 e acrescenta-se o erro (no caso 7×100). Com o resultado obtido procede-se de maneira análoga e, assim sucessivamente, até que o resto fique menor que o divisor.

$$\begin{array}{rcl}
 & 7825 \div 43(50-7) = & 100 \\
 1' - 50 \times 100 & \begin{array}{r} 5000 \\ \hline 2825 \end{array} & \\
 1'' + 7 \times 100 & \begin{array}{r} 700 \\ \hline 3525 \end{array} \div 50 & = 70 \\
 2' - 50 \times 70 & \begin{array}{r} 3500 \\ \hline 25 \end{array} & \\
 2'' + 7 \times 70 & \begin{array}{r} 490 \\ \hline 515 \end{array} \div 50 & = 10 \\
 3' - 50 \times 10 & \begin{array}{r} 500 \\ \hline 15 \end{array} & \\
 3'' + 7 \times 10 & \begin{array}{r} 70 \\ \hline 85 \end{array} \div 50 & = 1 \\
 4' - 50 \times 1 & \begin{array}{r} 50 \\ \hline 35 \end{array} & \\
 4'' + 7 \times 1 & \begin{array}{r} 7 \\ \hline \end{array} & \\
 \text{resto} = 42 & \text{Quociente} = 181 &
 \end{array}$$

3.2 - A contribuição árabe

Estas limitações acabaram por proporcionar um excelente caminho para a chegada dos números e das maneiras de operar dos hindus. Do século VIII ao século XIII desenrolou-se um dos períodos mais brilhantes da história da ciência no mundo muçulmano. Nos países conquistados, foram recolhidas todas as obras gregas, filosóficas, científicas ou literárias que foi possível encontrar. Todas eram traduzidas em língua árabe e cuidadosamente estudadas. Nesta época, as obras de síntese se multiplicaram e se expandiram.

Os árabes se interessaram também pelas culturas orientais. Com relação aos números, primeiro eles se interessaram pela numeração grega, cujo uso foi adaptado às 28 letras de seu próprio alfabeto. Por intermédio dos gregos e dos cristãos da Síria e da Mesopotâmia eles recuperaram, também, o velho sistema sexagesimal posicional e o zero dos sábios babilônicos, adaptando-os a sua própria escrita em suas tábuas astronômicas.

Mas, quando iniciaram suas relações comerciais com a Índia pelo golfo Pérsico e a partir do porto de Bassora, os árabes se iniciaram na astronomia, na aritmética e na álgebra dos sábios desta civilização. A partir do final do século VIII, adotaram o conjunto do sistema numérico hindu: números, numeração decimal de posição, zero e métodos de cálculo.

Mas, o árabe não se contentaram em conservar as fundamentações das culturas grega, babilônica e hindu, trazendo também sua própria e considerável contribuição para o edifício. Ao recolher e traduzir as obras do passado, eles acrescentaram, de fato, vários comentários, neles misturando métodos gregos e hindus, combinando-os às vezes a procedimentos de origem babilônica.

Dentre os numerosos matemáticos com os quais contou a civilização arábico-islâmica na época de sua idade de ouro, temos que destacar Abu Abdallah Mohammed Ben Musa, de Khwarizmi (aproximadamente 780-850), bibliotecário da corte do

califa abássida Al-Mamum pouco depois do período em que Carlos Magno reinou sobre a Europa.

Este sábio é bastante célebre por duas obras, que contribuíram amplamente para vulgarizar os métodos de cálculo e os procedimentos algébricos de procedência hindu no mundo árabe e depois no Ocidente cristão.

A primeira delas - cujo original se perdeu mas que conhecemos graças a suas traduções latinas - trata da aritmética. É o primeiro livro árabe conhecido no qual a numeração decimal posicional e os métodos de cálculo de origem hindu merecem exemplos e explicações detalhadas. Posteriormente, ela desfrutará de uma tal reputação nos países da Europa ocidental que o nome de seu autor se tornará sinônimo do próprio sistema.

Latinizado, o nome de al-Khowarizmi transformou-se, sucessivamente em *Alchoarismi*, depois em *Algorismi*, *Algorismus*, *Algorismo* e por fim em *Algoritmo*. Durante muito tempo, este termo designou, assim, na Europa o cálculo por escrito inventado pelos árabes, antes de adquirir a acepção mais ampla que hoje lhe atribuímos²¹.

Devemos ressaltar, que quando os árabes começaram a se utilizar do sistema numérico hindu, os nove primeiros algarismos deste sistema foram de início pura e simplesmente copiados. Mas quando passaram pelas mãos dos escribas e copistas arábicos-persas, os símbolos foram pouco a pouco sofrendo modificações gráficas e se afastaram de seus protótipos²². No entanto, é a grafia própria dos árabes ocidentais que atingirá os povos cristãos da Europa medieval a partir da Espanha, antes de dar origem aos algarismos de que hoje conhecemos e que receberam por gerações consecutivas a denominação de "algarismos arábicos".

Finalmente, vamos observar um exemplo de como os aritméticos hindus operavam suas multiplicações a partir do século VI. Trata-se do procedimento denominado "por quadriculagem" (ou "por quadro"). Depois será transmitido aos árabes e, por seu intermédio, aos europeus que lhe atribuirão o curioso nome *per gelosia* (por janela).

Como ilustração, multipliquemos 456 por 357.

	4	5	6
3			
5			
7			

Como o multiplicando (456) possui três algarismos e o multiplicador (357) três, desenha-se uma matriz de três por três. Na parte de cima escreve-se o multiplicando da esquerda para a direita e à esquerda escreve-se o multiplicador de baixo para cima.

²¹ Na acepção moderna, algoritmo significa um procedimento cuja execução termina para quaisquer valores dos dados, sendo que, um procedimento é uma sequência finita de instruções que podem ser executados por um agente computacional, seja ele humano ou não.

²²A origem de nossos "algarismos arábicos" não é aquela empregada atualmente por todos os países do Golfo Pérsico (os "algarismos *hindi*). Nossos algarismos atuais vêm dos árabes ocidentais (os que povoaram o norte da África e uma parte da Espanha). Esta variação eram denominadas "algarismos *ghobar*".

	4	5	6
3	12	15	18
5	20	25	30
7	28	35	42

Em seguida, divide-se cada casa em duas meias casas e efetua-se o produto de cada número da esquerda por cada número colocado acima do quadro. O resultado de cada produto parcial será colocado na coluna e na linha correspondente de maneira que as unidades fiquem na parte de cima e as dezenas na parte de baixo.

	4	5	6	
3	12	15	18	8
5	20	25	30	6
7	28	35	42	3
	3	4	3	

↑ No exterior do retângulo, coloca-se a soma dos algarismos de cada diagonal, começando por aquela que é formada a partir do número 8. Em seguida, procede-se por diagonal partindo da direita para a esquerda e de cima para baixo. Se preciso, guarda-se o resto de uma diagonal para a seguinte, obtendo-se assim, no exterior do quadro, um em seguida do outro, todos os algarismos do produto final. A leitura do resultado é feita da esquerda para a direita.

Assim: $456 \times 753 = 343.368$

3.3 - Os algarismos hindu-arábicos na Europa

Como vimos anteriormente, os árabes, a partir do século IX, trouxeram até as fronteiras de Europa o cálculo a maneira hindu. O primeiro passo para introdução destes métodos na Europa será dado por Gerbert d'Aurillac, que acabou por se tornar papa em 999 sob a alcunha de Silvestre II. Nascido na Aquitânia por volta de 945, entrou para o convento de Saint-Gérauld d'Aurillac, onde iniciou-se em matemática e astronomia, filiando-se, após uma longa estadia na Espanha, à escola dos mestres árabes, que lhe ensinaram a usar o astrolábio, revelando-lhe seu sistema de numeração e todos os seus métodos de cálculo. De volta a França, Gerbert ensina numa escola diocesana de 972 a 982 em Reims, exercendo seus ensinamentos uma influência preponderante sobre as escolas de seu tempo. Portanto, é a ele que se deve a origem da primeira introdução dos algarismos arábicos na nossa cultura.

No entanto, o que ficou nesse primeiro momento foram só os nove primeiros algarismos, isto é, nada de zero, nem de métodos de cálculo provindo da Índia. Isto se deve ao fato de que ao tentar fazer prevalecer o procedimento indo-árabe, Gerbert encontrou uma grande resistência do clérigo da época que considerando-se digna e fiel herdeira da "grande" tradição romana, não admitia a superioridade de uma outra tradição. Assim, nesse primeiro estágio os algarismos arábicos só foram empregados para simplificar o uso das velhas tábuas de cálculo, ou seja, em vez de colocar em cada coluna do ábaco a quantidade de pedras correspondentes às unidades da ordem correspondentes, surgiu a idéia de usar fichas de chifre nas quais estavam gravados os algarismos arábicos de 1 à 9.

No entanto, alguns calculadores, sem dúvida mais conservadores ainda do que os primeiros, descobriram um jeito de lhe opor uma viva resistência. Gravaram em

suas contas de chifre os algarismos romanos de 1 à 9, em vez de nelas imprimir "os signos diabólicos desses cúmplices de Satanás, que são os árabes"²³.

Apesar de parecer insignificante esta investida foi bastante significativa, pois, a partir de então os abacitas vão gradativamente introduzir na Europa os métodos de cálculo dos hindus, até que o método escrito para o cálculo, finalmente acabe por suplantando as tábuas de contar.

Conclusão

Verificamos que o conceito de número esteve, igualmente, presente nas diversas civilizações humanas desde os seus tempos mais antigos. Mas, por idealizarem os seus símbolos escritos para representar números, muito antes de se fazer sentir a necessidade de meios simples e rápidos para calcular, os homens não puderam avaliar a exigência dos números, com os quais pudessem resolver simples questões aritméticas.

Portanto, a medida que se viam forçados a lidar com números cada vez maiores, o homem cessou de confiar inteiramente em talhas e de representar os números por entalhes e gravações, concebendo a idéia de utilizar seixos e conchinhas, que podia desarmar com facilidade e tornar a usar quantas vezes quisesse. Esta, de acordo com Hogben (1956), é uma provável origem do ábaco. A princípio mais não era, talvez, do que uma superfície lisa sulcada por vários rasgos paralelos que com o passar dos anos foi transformando-se até atingir, finalmente, suas formas definitivas como os ábacos de ficha na Europa ou o modelo oriental que consiste de um conjunto de missangas bem distribuídas, em estacas verticais, dentro de uma armação fechada.

O aparelho de contar ou ábaco é uma descoberta antiquíssima. Sempre o vemos onde quer que se tenha implantado uma cultura megalítica. Desde mais remota antiguidade até o início da era cristã, este instrumento nas suas mais variadas formas foi o único instrumento de calcular do qual dispunha a humanidade.

A idéia de que os algarismos são símbolos com que se podem efetuar operações, era um conceito absolutamente estranho, mesmo para os mais habéis matemáticos da antiga Grécia. Esta consideração permite-nos concluir que é um erro pensar que o ábaco e a régua cálculo tenham sido instrumentos com funções similares em seus devidos tempos, pois, enquanto o primeiro, se constituiu para suprir as impossibilidades dos sistemas de numeração em uso, o segundo, pressupõe em sua manipulação as potencialidades do sistema de numeração hindu-arábico.

Quanto ao modelo de ábaco sugerido na introdução deste trabalho, não se verificou evidências de que tal modelo tenha sido usado em algum lugar no passado. Isto parece corroborar duas, particulares, impressões iniciais. A primeira, é de que suas

²³ Chegou-se mesmo a sugerir que Gerbert fora alquimista e feiticeiro.

possibilidades operatórias são bastante limitadas e, a segunda, é de que o mesmo não é mais do que uma versão, ainda mais rígida, do *quadro valor de lugar*.

Finalmente, apesar da questão inicial a respeito das possibilidades do ábaco, em suas diversas formas, no processo de ensino/aprendizagem das operações aritméticas manter-se em aberto, tal discussão não pode ser iniciada concedendo a estes instrumentos a honra de supô-los misteriosamente profundos, quando, se comparados as possibilidades operatórias do sistema numérico hindu-arábicos, eram inutilmente complicados.

Bibliografia

Atlas da História do Mundo. Folha de São Paulo, 1995.

BORTOLOTO, A. G. e ANDREAZZA, M.S.S.. Fazendo matemática nas séries iniciais. EDUCS. Caxias do Sul, 1992.

BOYER, C. B.. História da matemática. Editora Edgard Blücher Ltda. São Paulo, 1974.

CENTURIÓN, M. Conteúdo e metodologia da Matemática: Números e operações. São Paulo: Scipione, 1994.

FREDERIC, R. The Algebra of Mohammed Ben Musa. Printed for the Oriental Translation Fund: London, 1831.

HOGBEN, Lancelot. Maravilhas da Matemática. Influência e função da matemática nos conhecimentos humanos. Editora Globo, Rio de Janeiro, 1956.

IFRAH, Georges. OS NÚMEROS: a história de uma grande invenção. Editora Globo, Rio de Janeiro, 1991.

KARPINSKI, Louis Charles. The history of arithmetic. Rand McNally & Company. Chicago, 1925.

LUCCHESI, Claudio L. et al. Aspectos teóricos da computação. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

MENNINGER, Karl. Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers. The M.I.T. Press. Cambridge, 1970.

STRUICK, Dirk. História concisa das Matemáticas. Gradiva. Lisboa, 1989.

SMITH, David Eugene. History of Mathematics. New York : Dover Publication.