

UNESP – Campus de Rio Claro – Educação Matemática

DISCIPLINA – Estatística (2011)

Uma introdução ao estudo de probabilidade

José Eduardo Ferreira da Silva

Índice

	Pág.
1- Introdução	01
1.1- O problema dos pontos	02
1.1.1- Solução de Fermat	02
1.1.2- Solução de Pascal	03
2- Atribuição de probabilidade	04
2.1- O enfoque clássico.....	05
2.2- O enfoque da frequência relativa	06
2.3- O enfoque axiomático	09
3- Noções fundamentais de probabilidade	09
3.1- Aplicações.....	10
4- Probabilidade condicional	12
3.1- Aplicações.....	13
5- Eventos independentes	15
6- Lei da probabilidade total	16
7- Regra de Bayes	18
8- Ensaios de Bernoulli: a distribuição binomial	21
9- A lei binomial de probabilidade	24
10- Referências Bibliográficas	26

1- Introdução

Pensar em probabilidade é, sobretudo, abandonar a crença de que nós vivemos todos os dias num mundo muito sólido e ordenado, onde as coisas fantásticas acontecem, quase só, para confirmar a solidez de todos os dias. Afinal, não há grandes rompimentos de expectativas e fatos definitivamente imprevisíveis dentro do mundo cotidiano.

Pensar probabilidade é aceitar que, não obstante o significativo avanço da ciência, muito pouco sabemos a respeito da maioria dos fenômenos que nos cercam. Por exemplo, do mesmo modo que os cientistas atuais podem, com muita precisão, apontar para a localização de um pequeno asteróide a milhares de quilômetros no espaço; esses mesmos cientistas são incapazes de prever se, após o lançamento de uma moeda, o resultado será “cara” ou “coroa”.

Todavia, como é quase certo que sobre os prováveis resultados do lançamento de uma moeda, muitas pessoas nos digam que acontecimentos desta natureza são atribuídos ao acaso e; tendo em vista que acaso é meramente eufemismo de ignorância, a questão é: do ponto de vista da matemática, o que significa dizer que um acontecimento é determinado pelo acaso?

Significa que no reino do acaso, observamos uma relativa regularidade ou uma relativa simetria. Sentimos, conforme Kasner & Newmam (1968, p.218) “uma ordem dentro da desordem”. Portanto, por mais paradoxal que possa parecer; pensar probabilidade é pensar sob a perspectiva de “leis do acaso”. Ou seja, é aceitar que parte da análise crítica da teoria da probabilidade é uma tentativa de formarmos uma gradação de crença racional sobre acontecimentos que atribuímos ao acaso.

Quanto aos princípios que, atualmente, regem esse estudo de contingências, há uma espécie de consenso de que a questão à qual está ligada a origem da ciência da probabilidade é o *problema dos pontos*.

Especificamente, determinar a divisão das apostas de um jogo de azar entre dois jogadores, igualmente hábeis, supondo-se ser conhecido o placar no momento da interrupção do jogo, bem como o número de pontos necessários para que cada um dos jogadores possa vencer o jogo. (cf. Ives 2004, p. 393)

1.1- O problema dos pontos

“Quando moderado, o jogo possui virtudes inegáveis. Contudo apresenta um curioso espetáculo, repleto de contradições. A indulgência com seus prazeres sempre foram maiores do que a palidez do medo do fogo do inferno; e os grandes laboratórios e respeitáveis palácios dos seguros apresentam-se como monumentos a uma ciência nascida dos copos do jogo de dados”. Kasner & Newman (1968, p. 229-230).

Embora, no final do século V e início do século IV, Pacioli (1445-1509), Cardano (1501-1576) e Tartaglia (1499-1557) tenham feito considerações a respeito do *problema dos pontos*, um efetivo avanço somente se verifica, a partir de 1654, quando o Chevalier de Mére, um experiente jogador, quis uma informação sobre as distribuições das combinações do jogo, tendo em vista que, ao que parece, seu raciocínio teórico, a respeito do problema, não coincidia com suas observações práticas.

Assim, propôs o *problema dos pontos* a Blaise Pascal (1588-1640) que, além de se interessar pela questão, compartilhou o problema com Pierre de Fermat (1601?-1665). Daí em diante, seguiu-se uma notável correspondência entre os dois matemáticos, a qual resultou em duas soluções distintas, porém idênticas no resultado.

Quanto ao problema dos pontos, *suponha um jogo de azar entre dois jogadores [jogador **A** e jogador **B**] igualmente hábeis, onde o vencedor é aquele que, primeiramente, conseguir 5 vitórias. Além disso, admita que, no momento em que o jogador **A** possui 3 vitórias e o jogador **B** possui 2 vitórias, o jogo é interrompido. Assim, a questão é: como dividir o prêmio entre os jogadores **A** e **B**?*

A	B
V	V
V	V
V	

1.1.1 A solução de Fermat

Tendo em vista que, para ganhar o jogo, o jogador **A** precisa de 2 (dois) pontos e o jogador **B** precisa de 3 (três) pontos, isso significa que mais quatro partidas seriam suficientes para decidir o jogo.

Portanto, existem dezesseis modos diferentes, pelos quais o jogo poderia se desenvolver. A título de ilustração, chamando de **a** uma partida ganha por **A** e de **b** uma partida ganha por **B**, os dezesseis diferentes modos são os seguintes:

<u>aaaa</u>	<u>baaa</u>	<u>baab</u>	<u>bbab</u>
<u>aaab</u>	<u>aabb</u>	<u>baba</u>	<u>babb</u>
<u>abaa</u>	<u>abab</u>	<u>bbaa</u>	<u>abbb</u>
<u>abba</u>	<u>abba</u>	<u>bbba</u>	<u>bbbb</u>

Observe que, enquanto os casos em que **a** aparece duas ou mais vezes são favoráveis ao jogador **A**, os casos em que **b** aparece três vezes ou mais são favoráveis ao jogador **B**. Como existem **11** casos favoráveis ao jogador **A** e **5** casos favoráveis ao jogador **B**, isso significa que as apostas devem ser divididas na razão **11:5**.

1.1.2 A solução de Pascal

Conforme Ives (2004, p.393-394), Pascal resolveu o problema dos pontos utilizando o seu “Triângulo Aritmético”. Especificamente, uma tabela numérica atualmente conhecida como “Triângulo de Pascal” e, cuja configuração é a seguinte:

1ª linha	1					
2ª linha	1	1				
3ª linha	1	2				
4ª linha	1	3	3	1		
5ª linha	1	4	6	4	1	
6ª linha	1	5	10	10	5	1
...	...					

Se indicarmos por **C(n,r)** o número de **n** combinações simples, de ordem **r**, então é possível verificar que os números ao longo da 5ª linha do “Triângulo de Pascal” são, respectivamente,

$$C(4,0) = 1 \quad C(4,1) = 4 \quad C(4,2) = 6 \quad C(4,3) = 4 \quad C(4,4) = 1$$

Como, $C(4,4)$ é a quantidade de maneiras de se obter quatro letras **a**, $C(4,3)$ é a quantidade de maneiras de se obter três letras **a**, e assim sucessivamente, segue a solução do problema,

$$[C(4,4) + C(4,3) + C(4,2)] : [C(4,1) + C(4,0)] = (1 + 4 + 6) : (1 + 4) = 11 : 5.$$

A título de ilustração, admita que ambos os jogadores tenham apostado R\$ 40,00, cada um, o que perfaz um prêmio total de R\$ 80,00. Assim, segundo Pascal e Fermat, o jogador **A**, com três vitórias, deverá receber R\$ 55,00; enquanto o jogador **B**, com duas vitórias, deverá receber R\$ 25,00.

Portanto, uma solução diferente da que foi proposta por Cardano(?) que, segundo Batanero (2???, p.??), defendia a divisão do prêmio em partes proporcionais ao número de vitória de cada jogador, ou seja, **3:2**. Assim, na perspectiva de Cardano, enquanto o jogador **A**, com três vitórias, receberia R\$ 48,00; o jogador **B**, com duas vitórias, receberia R\$ 32,00.

Note-se que, embora, na perspectiva do jogo de azar, escolher uma das formas descritas para a divisão do prêmio é somente decidir para que lado pender a balança da vantagem; o fato é que a forma pela qual Pascal e Fermat resolveram atacar o *problema dos pontos* mostrou-se mais frutífera ao tratamento racional do acaso, do que os diferentes raciocínios, até então propostos. Nasciam, assim, as bases teóricas para o que, atualmente, é denominado atribuição de probabilidade.

2- A atribuição de probabilidade

Embora existam diferentes enfoques para se obter uma estimativa de probabilidade, todos concordam que, do ponto de vista matemático, uma relação somente deve ser considerada se a ela pudermos atribuir alguma espécie de valor. Assim, no caso específico da relação de probabilidade, quando alguma coisa não pode acontecer, sua probabilidade é 0 e; se houver certeza de acontecer, sua probabilidade é 1. Desse modo, qualquer probabilidade entre esses dois extremos será representada por uma fração maior do que zero e menor do que um.

Quanto aos diferentes enfoques para a atribuição de probabilidade, eles são basicamente três: o enfoque clássico, o enfoque da frequência relativa e o

enfoque axiomático. Porém, antes de passarmos ao tratamento específico desses enfoques, duas observações.

Em primeiro lugar, um acontecimento ou *evento* é dito *determinístico* quando repetido em condições semelhantes conduz a resultados essencialmente idênticos. Em oposição, um evento é dito *aleatório* quando executado repetidas vezes, em condições aparentemente idênticas, pode apresentar resultados variados.

Finalmente, dois acontecimentos contingentes serão denominados equiprováveis (igualmente prováveis), se “(...) seja pela ausência de qualquer evidência ou após considerar todas as evidências relevantes, não se pode esperar um dos acontecimentos, de preferência ao outro.” (Kasner & Newman, 1998 p. 231).

2.1 – O enfoque clássico

Se houver um número de modos equiprováveis de um evento acontecer e um número de modos equiprováveis deste mesmo evento não ocorrer, dizemos que a probabilidade de acontecer o evento é a razão entre o número de modos que evento pode acontecer e o número total de maneiras pelas quais ele pode e não pode ocorrer.

De modo geral, se chamarmos de *favoráveis* (**F**) as maneiras pelas quais os eventos podem acontecer e, *desfavoráveis* (**D**) os modos pelos quais os eventos não podem ocorrer, a probabilidade do evento é a fração

$$\frac{\text{nº de eventos favoráveis}}{\text{nº de eventos favoráveis} + \text{nº de eventos desfavoráveis}} \quad \text{ou,} \quad \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{F + D}}$$

A título de ilustração, considere o problema: após o lançamento de uma moeda, qual é a probabilidade do resultado ser “cara”?

Ora, se supormos que a moeda é simétrica, é equiprovável que o lançamento resulte “cara” ou “coroa”, pois não existe nenhuma razão que justifique anteciparmos o resultado “cara” ou o resultado “coroa”.



Portanto, se a moeda pode cair “cara” ou “coroa”, a probabilidade de cair cara será dada pela relação

$$\frac{\text{CARA}}{\text{CARA} + \text{COROA}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Contudo, uma dificuldade oriunda do enfoque clássico – também denominado ponto de vista subjetivo da probabilidade – resulta do princípio da razão insuficiente, ou seja, “(...) se ignoramos completamente as diferentes maneiras pelas quais um acontecimento pode ocorrer e, por isso, não temos base razoável para preferências, consideraremos como ocorrendo de um modo ou de outro”. (Kasner & Newman, 1998, p. 221).

E se assim o é, ou seja, se ignoramos completamente as diferentes maneiras pelas quais um evento poderá acontecer; então há de se considerar a seguinte questão: o que nos permite afirmar que eles serão igualmente prováveis?

2.2– O enfoque da frequência relativa

O enfoque da frequência relativa ou interpretação estatística, parte do princípio de que o provável é aquilo que normalmente acontece. Dito de outra forma, nesse enfoque, a probabilidade é considerada como a frequência relativa experimental em que um evento ocorre em uma determinada classe de acontecimentos. Assim, dizer que um evento **E**, em uma experiência aleatória, tem probabilidade **p** de ocorrer significa que, se a experiência aleatória for realizada diversas vezes sob as mesmas condições, a proporção do número de experiências em que o evento **E** ocorre é aproximadamente **p**.

Mais precisamente, se **n** o número de repetições de uma determinada experiência e **n_E**, o número de vezes em que o evento **E** ocorre; então, denomina-se frequência relativa de ocorrência do evento **E** nas **n** realizações da experiência aleatória o número **f_e**, tal que:

$$f_e = \frac{n_E}{n} = \frac{\text{n}^\circ \text{ de vezes que o evento } E \text{ ocorre}}{\text{n}^\circ \text{ de realizações da experiência}}$$

Uma das características do enfoque estatístico é que ele nos permite verificar que a frequência relativa apresenta as seguintes propriedades:

- 1- $f_e = 1$ se, e somente se, o evento **E** ocorrer em todas as **n** repetições da experiência.

Demonstração: se o evento **E** acontece em todas as **n** repetições da experiência, então $n_E = n$. Logo, $f_E = n / n = 1$

- 2- $f_E = 0$ se, e somente se, o evento **E** nunca ocorrer em todas as **n** repetições da experiência.

Demonstração: se o evento **E** nunca acontece em todas as **n** repetições da experiência, então $n_E = 0$. Logo, $f_E = 0 / n = 0$

- 3- $0 \leq f_E \leq 1$

Demonstração: em **n** repetições da experiência, temos que $0 \leq n_E \leq n$.

Dividindo, todos os membros por **n**, vem que $(0 / n) \leq (n_E / n) \leq (n / n)$

Logo, $0 \leq f_E \leq 1$

- 4- Se **E** e **F** forem eventos mutuamente exclusivos (isto é, a ocorrência de **E** independe da ocorrência de **F** e vice-versa), e se $f_{E \cup F}$ for a frequência relativa associada ao evento $(E \cup F)$, então, $f_{E \cup F} = f_E + f_F$

Demonstração: Se **E** e **F** são eventos mutuamente exclusivos, então $(E \cap F) = \emptyset$ e, por conseguinte, $n_{E \cap F} = 0$.

Como, $n_{E \cup F} = n_E + n_F - n_{E \cap F}$ segue que $n_{E \cup F} = n_E + n_F$.

Dividindo, todos os membros por **n**, vem $(n_{E \cup F} / n) = (n_E / n) + (n_F / n)$

Logo, $f_{E \cup F} = f_E + f_F$

Para ilustrar a forma pela qual atribuímos probabilidade a um evento aleatório sob o enfoque da frequência relativa, vamos retomar a experiência de lançar, ao acaso, uma moeda e, em seguida, fazer a leitura da face voltada para cima.

Se fizermos um total de **n** experiências e obtivermos **C** vezes o resultado “cara”, vamos dizer que a *frequência absoluta* do evento “cara” é **C** e a *frequência relativa* é C / n .

Como bem nos lembram Guelli, Iezzi & Dolce (s/d, p. 104), é claro que se jogarmos a moeda apenas uma vez, o resultado será imprevisível. Contudo, as sistemáticas experiências de se lançar uma moeda, ao acaso, parecem apontar no sentido de que, repetindo-se o lançamento da moeda um número **n** crescente de vezes, a ocorrência do evento “cara” tende a estabilizar-se em

torno da metade de n ; conforme mostram os resultados de algumas experiências históricas. (Ibid p.104). (Vide Tabela 1).

Tabela 1

Experimentador Frequência	Buffon	Pearson
n	2048	12012
C	4040	25000
C/n	0,50643	0,5005

Portanto, o enfoque estatístico é, antes de tudo, um enfoque *a posteriori*, ou seja, após supor que o futuro será consistente com o passado, ele afirma que:

$$\text{se } n \rightarrow \infty, \text{ então } \frac{C}{n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Em síntese, o enfoque estatístico apóia-se na “lei dos grandes números” enunciada, no século XVIII, por Jacob Bernoulli (1654-1705) (cf. Stigler, 1986 p. 64); a qual, em geral, é enunciada, mais ou menos, da seguinte forma: “se após n repetições de um experimento (**n suficientemente grande**), se observam h ocorrências de determinado evento, então a probabilidade do evento é h/n . Essa probabilidade é chamada *probabilidade empírica*”. (Spiegel, 1978 p.8).

E se assim o é, isso significa que este ponto de vista é, no mínimo, questionável. Afinal, qual é a justificativa para tal suposição? Após executar a experiência e determinar a frequência relativa, afirma-se que a probabilidade é $1/2$. Ora, mas isso é apenas uma hipótese!

Certamente. Mas, seja como for, é indiscutível que esse enfoque é, em grande parte, o responsável pela ampliação na utilização da probabilidade, não apenas em Física ou Astronomia, mas, sobretudo, nas Ciências Sociais, Biologia e Economia.

Portanto, em acordo Kasner & Newman (1968, p. 223), trata-se de um “(...) processo científico que se apóia na mesma conveniente regra de bolso que nos guia nos assuntos práticos: uma hipótese é válida se nos guia a resultados corretos mais freqüentemente do que a errados; as verificações experimentais são definitivas – até que a experiência seguinte venha a modificá-las.”

2.3– O enfoque axiomático

O enfoque axiomático busca desvencilhar o estudo matemático de probabilidade dos princípios vagos em que se apóiam o enfoque clássico e o enfoque estatístico. Ou seja, os pontos de vista que, respectivamente, se sustentam sobre as assertivas dos *eventos equiprováveis* e dos *números suficientemente grandes*.

Trata-se, portanto, de um ponto de vista em que as proposições matemáticas somente são verdadeiras se não nos conduzirem a contradições. Em outras palavras, isso significa que o enfoque axiomático é um método lógico dedutivo e, por isso, diferente do método experimental.

3- Noções fundamentais de probabilidade

Definição 1: Seja A um experimento aleatório e Ω um espaço amostral associado a E . Se a cada evento E de Ω associamos um número real $P(A)$ tal que, $P(A) = n(A) : n(\Omega)$; então $P(A)$ é denominado probabilidade de A , além do que, obedece aos seguintes axiomas.

- i) $P(\phi) = 0$;
- ii) $P(\Omega) = 1$;
- iii) $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo $A \subset \Omega$;
- iv) Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Seguem, então, os seguintes teoremas:

Teorema I: Se A^C é o complementar de A , então $P(A^C) = 1 - P(A)$.

Demonstração: Sabemos que $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$.

Portanto: $P(A^C) = 1 - P(A)$

Teorema II: Se $A \subset B$ então $P(A) = P(B) - P(B - A)$.

Demonstração: Como $B = A \cup (B - A)$, temos:

$$P(B) = P[A \cup (B - A)] = P(A) + P(B - A).$$

Portanto $P(A) = P(B) - P(B - A)$

Corolário: Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Demonstração: Como $P(A) = P(B) - P(B - A)$ e $P(B - A) \geq 0$, pois P é uma probabilidade. Disso, resulta que $P(A) \leq P(B)$

Teorema III: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Demonstração: Temos que: $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$ e

$$P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$$

Somando as duas igualdades, vem que:

$$P(A) + P(B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B) + P(A \cap B)$$

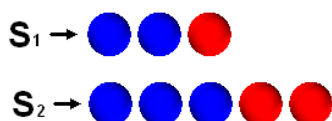
Portanto, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3.1– Aplicações

- 1) Suponha duas sacolas de tal modo que a primeira (S_1) possui duas bolas azuis e uma vermelha e, a segunda (S_2) possui três bolas azuis e duas vermelhas. Retirando-se, ao acaso, uma bola de cada sacola, qual é a probabilidade das bolas serem de cores diferentes?

Dados do problema:

Obs.: Como existem três bolas em S_1 e cinco bolas em S_2 , o número total de maneiras diferentes pelo qual elas podem ser combinadas, duas a duas, é de $3 \times 5 = 15$ (vide figura abaixo). Dessas 15 combinações, enquanto 9 possuem cores iguais, 7 possuem cores diferentes.



$S_1 \backslash S_2$					
	 	 	 	 	 
	 	 	 	 	 
	 	 	 	 	 

Solução:

Espaço amostral: Ω é o conjunto de todas as combinações $\rightarrow n(\Omega) = 15$.

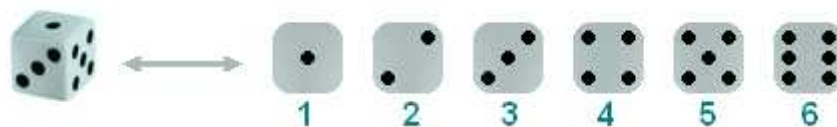
Eventos favoráveis: A é conjunto de todas as combinações, duas a duas, em que as bolas possuem cores diferentes $\rightarrow n(A) = 7$.

Logo, pela definição, segue que $P(A) = n(A) / n(\Omega) = 7/15$.

- 2) Qual é a probabilidade de que, após o lançamento (ao acaso) de um dado honesto de seis faces, aconteça um número maior do que quatro?

Dados do problema:

Obs.: Em um dado de seis faces os resultados possíveis são $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, conforme figura abaixo. Note-se que, dizer que um dado é honesto significa que as chances de saída de um determinado resultado são iguais para todos os demais resultados possíveis.



Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, com $P(1) = P(2) = \dots = P(6) = 1/6$

Eventos favoráveis: $A = \{5\}$ e $B = \{6\}$

Solução:

Como os eventos A e B são mutuamente exclusivos (sair o número 5 significa que não saiu o número 6), então pelo *axioma III*,

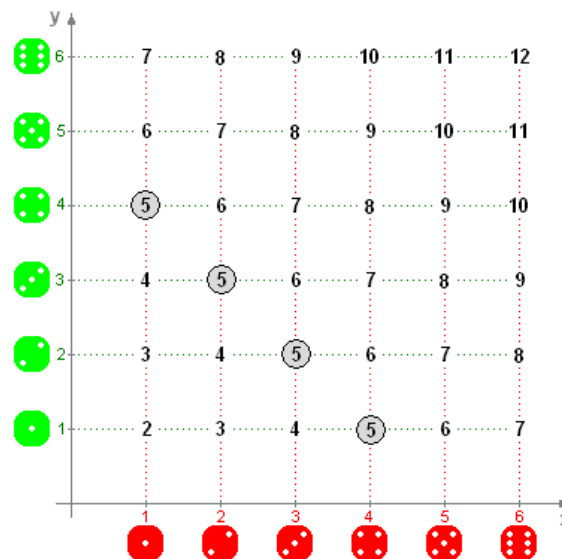
$$P(A) \text{ ou } P(B) \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1/6 + 1/6 = 1/3.$$

- 3) No lançamento simultâneo de dois dados honestos de seis faces, ao acaso, qual a probabilidade de não se obter soma igual a 5?

Dados do problema:

Obs.: Após o lançamento simultâneo de dois dados de seis faces, as somas de pontos possíveis de se obter são 36, distribuídas conforme o gráfico ao lado.

Espaço amostral: é composto pelos 36 resultados possíveis. Portanto, $n(\Omega) = 36$



Evento complementar: é o conjunto A^C formado por todos os pares ordenados cuja soma é 5, ou seja, $A^C = \{(4,1), (3,2), (2,3), (1,5)\} \rightarrow n(A^C) = 4$

Portanto, $P(A^C) = 4/36 = 1/9$.

Solução:

Pelo Teorema I, sabemos que $P(A^C) = 1 - P(A) \leftrightarrow P(A) = 1 - P(A^C)$.

Logo, $P(A) = 1 - (1/9) = 8/9$.

- 4) Retira-se, ao acaso, uma carta de um baralho comum de 52 cartas. Qual a probabilidade de que essa carta seja uma *Dama* ou uma carta de *copas*?

Dados do problema:

Obs.: Um baralho comum possui 52 cartas, divididas igualmente em quatro naipes, ou seja, {**ouros** ♦, **copas** ♥, **espadas** ♠ e **paus** ♣}. Para cada naipe, a distribuição e enumeração das treze cartas são a seguinte:

Naípe	Cartas												
♦	Ás	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
♥	Ás	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
♠	Ás	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
♣	Ás	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K

Obs.: J = Valete, Q = Dama e K = Rei

O espaço amostral: Ω é o conjunto de todas as cartas do baralho $\rightarrow n(\Omega) = 52$.

Eventos favoráveis: $A = \{Q♦, Q♥, Q♠, Q♣\} \rightarrow n(A) = 4$;

$B = \{\text{Ás♥}, 1♥, 2♥, 3♥, 4♥, 5♥, 6♥, 7♥, 8♥, 9♥, 10♥, J♥, Q♥, K♥\} \rightarrow n(B) = 13$;

portanto, $P(A) = n(A) / n(\Omega) = 4/52$ e $P(B) = n(B) / n(\Omega) = 13/52$

Solução:

Como, o que se quer é $P(A)$ ou $P(B)$, pelo Teorema III, vem que:

$$P(A) \text{ ou } P(B) \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Quanto a $P(A \cap B)$, temos que $A \cap B = \{Q♥\} \rightarrow n(A \cap B) = 1$.

Portanto, $P(A \cap B) = 1/52$.

Logo, $P(A \cup B) = 4/52 + 13/52 - 1/52 = 16/52 = 4/13$.

4- Probabilidade condicional

A título de ilustração, suponha um avião com 190 passageiros, os quais podem ser divididos de acordo com a tabela ou diagrama que seguem.

Pais \ Sexo	Mulheres (M)	Homens (H)
Argentinos (A)	50	20
Brasileiros (B)	40	80
Total	90	100

	M	H
A	50	20
B	40	80

Pergunta-se: escolhido um homem entre os passageiros, qual é a probabilidade de que ele seja argentino?

Neste caso, note que ser argentino está condicionado ao fato de ser homem. Portanto, enquanto o indivíduo procurado está no conjunto $A \cap H$, o espaço amostral é o conjunto H .

Assim, chamando $P(A|H)$ a probabilidade condicional de A , dado H , vem que:

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} = \frac{20}{100} = 20\%$$

Definição II: Sejam A e B dois conjuntos de modo que $P(B) > 0$. Denomina-se probabilidade condicional de A , dado B (ou na hipótese de ter ocorrido B), a probabilidade $P(A|B) = P(B \cap A) / P(B)$.

Portanto, da definição decorre que:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad *(1)$$

Teorema IV (ou Lei do Produto): Se $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$, então,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Esboço da Demonstração: Para dois conjuntos A_1 e A_2 a expressão é válida porque coincide com $*(1)$. Verifiquemos a expressão para três conjuntos, ou seja, A_1 , A_2 e A_3 .

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P[A_3|(A_2 \cap A_1)] \cdot P(A_1 \cap A_2) = P[A_3|(A_2 \cap A_1)] \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1),$$

o qual é o resultado desejado. No caso geral o raciocínio é semelhante.

4.1 – Aplicações

- 1) Seja o experimento aleatório de lançar uma moeda, três vezes seguidas. Admita que os resultados obtidos nos dois primeiros lançamentos tenha sido “cara” para um deles e “coroa” para o outro. Pergunta-se: qual a probabilidade de que o resultado do terceiro lançamento dê “cara”?

Dados do problema:

Fazendo C = “cara” e K = “coroa”, temos, conforme tabela à direita, que: em três

	CC	CK	KC	KK
C	CCC	CCK	CKC	CKK
K	KCC	KCK	KKC	KKK

lançamentos de uma moeda, o espaço amostral dos possíveis resultados é:

$$\Omega = \{ CCC, CCK, CKC, CKK, KCC, KCK, KKC, KKK \} \rightarrow n(\Omega) = 8.$$

Solução:

Seja A, o conjunto de resultados possíveis em que, nos dois primeiros lançamentos, um deles é “cara” e o outro é “coroa”, isto é,

$$A = \{CKC, CKK, KCC, KCK\} \rightarrow n(A) = 4 \rightarrow P(A) = n(A)/n(\Omega) = 4/8 = 1/2$$

Seja B, o conjunto de resultados possíveis em que, no terceiro lançamento, o resultado é “cara”, ou seja, $B = \{CCC, CKC, KCC, KKC\}$.

Como, o que se quer é a probabilidade de B, dado A, [ou $P(B|A)$], isso significa que devemos encontrar $P(A \cap B)$, pois $P(B|A) = P(A \cap B) / P(A)$.

Tendo em vista que, $A \cap B = \{CKC, KCC\} \rightarrow n(A \cap B) = 2$, disso decorre que

$$P(A \cap B) = n(A \cap B)/n(\Omega) = 2/8 = 1/4$$

Logo, $P(B|A) = P(A \cap B) / P(A) = (1/4)/(1/2) = 1/2$.

- 2) Considere o experimento de retirar, ao acaso, uma carta de um baralho comum. Qual é a probabilidade de se obter um “Rei” vermelho?

Dados do problema:

Obs.: Um baralho comum possui 52 cartas, divididas igualmente em quatro naipes, ou seja, {**ouros** ♦, **copas** ♥, **espadas** ♠ e **paus** ♣}. Para cada naipe, a distribuição e enumeração das treze cartas são a seguinte:

Naípe	Cartas												
♦	Ás	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
♥	Ás	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
♠	Ás	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
♣	Ás	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K

Obs.: J = Valete, Q= Dama e K = Rei

Solução:

Dito de outra forma, o problema solicita a probabilidade da intersecção do conjunto de todas as cartas “Rei (K)” e o conjunto formado por todas as cartas vermelhas (V). Portanto, solicita o valor de $P(K \cap V)$.

Tendo em vista que $P(K \cap V) = P(K) \cdot P(V|K)$, isso significa que devemos calcular o valor de $P(K)$ e o valor de $P(V|K)$.

Como $K = \{K\spadesuit, K\heartsuit, K\clubsuit, K\diamondsuit\} \rightarrow n(K) = 4$, temos que $P(K) = 4/52 = 1/13$.

No caso de $P(V|K)$, temos que $(V|K) = \{K\spadesuit, K\heartsuit\} \rightarrow n(V|K) = 2$.

Ora, mas como $P(V|K) = n(V|K) / n(K)$, vem que $P(V|K) = 2/4 = 1/2$.

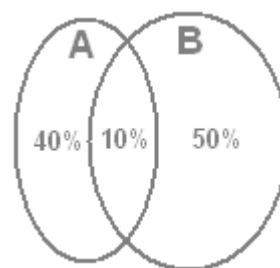
Logo, $P(K \cap V) = (1/2) \cdot (1/13) = 1/26$.

- 3) Suponha que em uma cidade existam dois jornais A e B. Admita ainda que enquanto 50% dos leitores lêem o jornal A, 60% lêem o jornal B. Se, após escolher um leitor ao acaso, sabemos que ele lê o jornal A, qual é a probabilidade de que ele leia, também, o jornal B.

Dados do problema:

Como $P(A) = 50\%$, $P(B) = 60\%$ e $P(A \cup B) = 100\%$ (pois é conjunto de todos os leitores), e $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, vem que:

$$P(A \cap B) = 60\% + 50\% - 100\% = 10\%.$$



Solução:

O problema solicita $P(B|A)$, isto é a probabilidade condicional de B, dado A.

Como $P(B|A) = P(A \cap B) / P(A)$, vem que:

$$P(B|A) = (10\%) / (50\%) = 1/5 = 0,20 = 20\%.$$

5- Eventos independentes

Dois eventos são ditos independentes um do outro se a ocorrência de um deles, de modo algum, tem relação com a ocorrência do outro. Por exemplo, quando lançamos, ao acaso, uma moeda duas vezes. Com efeito, pois o resultado do segundo lançamento nada tem a ver com o resultado obtido no primeiro lançamento.

Definição III: dois eventos **A** e **B** são *independentes* (ou *mutuamente exclusivos*) se, e somente se, $P(A|B) = P(A)$ ou $P(B|A) = P(B)$. Portanto, decorre da definição que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

A título de ilustração vamos considerar o experimento aleatório de lançar duas vezes uma moeda e determinar a probabilidade de obter o resultado “coroa” nos dois lançamentos [ou seja, (coroa, coroa)]. Quanto ao espaço amostral Ω de todos os resultados possíveis, após os dois lançamentos, temos que $\Omega = \{(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)\} \rightarrow n(\Omega) = 4$

Denotando por A o conjunto das possibilidades de se obter “coroa”, no primeiro lançamento, e B o conjunto das possibilidades de se obter “coroa”, no segundo lançamento, segue que:

$$A = \{(\underline{\text{coroa}}, cara), (\underline{\text{coroa}}, coroa)\} \rightarrow n(A) = 2, \text{ e daí } P(A) = 2/4 = 1/2;$$

$$B = \{(cara, \underline{\text{coroa}}), (coroa, \underline{\text{coroa}})\} \rightarrow n(B) = 2, \text{ e daí } P(B) = 2/4 = 1/2.$$

Como, a probabilidade de se obter “coroa” nos dois lançamentos é a probabilidade de ocorrência de $A \cap B = \{(coroa, coroa)\}$ e, além disso, os eventos são mutuamente exclusivos, então:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = (1/2).(1/2) = 1/4$$

6- Lei da Probabilidade Total

Definição IV: Seja Ω , um espaço amostral. O conjunto de eventos, mutuamente exclusivos, $A = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ é uma partição de Ω , quando dado um evento E, então, necessariamente, ocorre *um, e somente um*, evento $A_n \subset A$. Em outras palavras, A é uma partição de Ω , quando,

a) $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$,

b) $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

c) $P(A_i) > 0$ para todo i

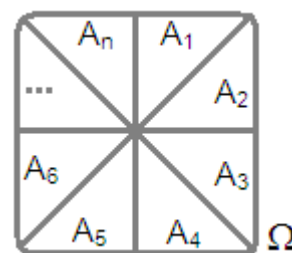


Figura - ??

(*) Note que, na figura ??, $A = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ é uma partição do espaço amostral Ω , pois $(A_i \cap A_j) = \emptyset$, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$, $P(A_i) > 0$, para todo i.

Teorema V: Seja B , um evento contido em uma partição $A = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ de Ω , conforme a figura ???. Então,

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B | A_1) + P(A_2) \cdot P(B | A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B | A_n)$$

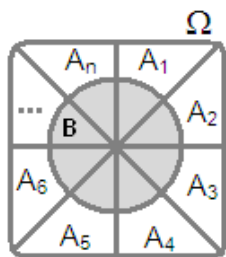


Figura - ???

Demonstração: Temos que

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B).$$

Então:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) \cup P(A_2 \cap B) \cup \dots \cup P(A_n \cap B) = \\ &= P(A_1) \cdot P(B | A_1) + P(A_2) \cdot P(B | A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B | A_n) \end{aligned}$$

Para exemplificar uma aplicação da Lei da Probabilidade Total, vamos considerar o seguinte problema: Considere duas urnas, a primeira contendo duas bolas azuis e três vermelhas e a segunda urna contendo quatro bolas azuis e uma vermelha. Sorteie-se, ao acaso, uma moeda. Se der “cara”, então, ao acaso, retira-se uma bola da urna 1 e, se der “coroa”, então, também ao acaso, retira-se uma bola da urna 2. Nessas condições, após sortear a moeda, qual a probabilidade da bola sorteada ser vermelha?



Obs.: Para a leitura da solução, admita a seguinte notação:

C = “cara” **K** = “coroa” **V** = bola “vermelha” **A** = bola “azul”

Solução:

Note que os eventos de se retirar uma bola são mutuamente exclusivos, assim como o é os resultados oriundos do lançamento da moeda. Com efeito, pois a saída de um resultado, anula a possibilidade de que outro ocorra.

Portanto, pela lei da probabilidade total, vem que: $P(V) = P(C \cap V) + P(K \cap V)$.

Ou seja,

$$P(V) = P(C) \cdot P(V | C) + P(K) \cdot P(V | K).$$

Como, $P(C) = P(K) = 1/2$, $P(V | C) = 3/5$ e $P(V | K) = 1/5$, segue que:

$$P(V) = (1/2) \cdot (3/5) + (1/2) \cdot (1/5) = (3/10) + (1/10) = 4/10 = 2/5.$$

7- Regra de Bayes

Teorema VI : Seja $A = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ uma partição do espaço amostral Ω .

Se B é um evento, tal que $P(B) \geq 0$, então segue que:

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B | A_k)}{\sum_{k=1}^n P(A_k) \cdot P(B | A_k)}$$

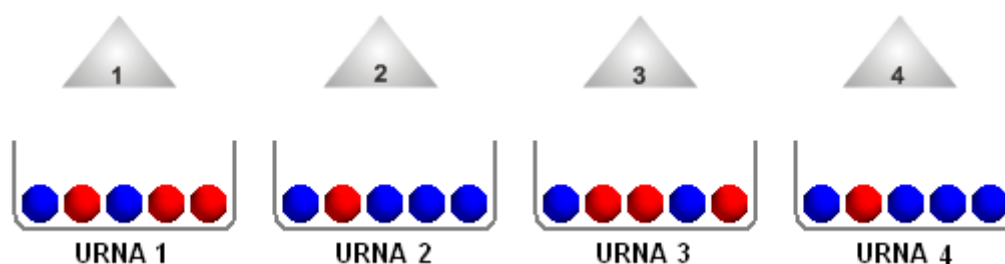
Demonstração: Do Teorema V, resulta que:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B | A_1) + P(A_2) \cdot P(B | A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B | A_n) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \cdot P(B | A_k)$$

Como, $P(A_k | B) = \frac{P(B \cap A_k)}{P(B)}$, segue que: $P(A_k | B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B | A_k)}{\sum_{k=1}^n P(A_k) \cdot P(B | A_k)}$

7.1 – Aplicações

- 1) Considere a situação: suponha quatro urnas, numeradas de 1 a 4, contendo bolas vermelhas e bolas azuis, conforme a figura abaixo. Para se retirar uma bola, lança-se um dado de quatro faces numerado de 1 a 4. Após o lançamento do dado, uma bola deve ser retirada aleatoriamente da urna, cuja numeração corresponda ao resultado obtido no dado. Por exemplo, se o resultado obtido no dado for 3, então uma bola deve ser retirada, ao acaso, da urna 3.



Suponha, agora, que não se conheça o resultado da jogada do dado (e, conseqüentemente, não se saiba de qual urna foi extraída a bola), mas que saibamos que a bola extraída é vermelha. Qual é a probabilidade de ter sido escolhida a urna 2 (isto é, qual é a probabilidade de ter aparecido 2 no dado?).

Obs.: Para a leitura da solução, admita a seguinte notação:

Indicações para o valor do dado:			
$D_1 = 1$	$D_2 = 2$	$D_3 = 3$	$D_4 = 4$
Indicações para as urnas:			
$U_1 = \text{urna 1}$	$U_2 = \text{urna 2}$	$U_3 = \text{urna 3}$	$U_4 = \text{urna 4}$

Solução:

Observe que todos os eventos são mutuamente exclusivos, pois a saída de um resultado anula a possibilidade de que outro venha ocorrer. Denotando bola vermelha por V , temos que: como o que se quer é $P(D_2 | V)$, então pela regra de Bayes segue que:

$$P(D_2 | V) = \frac{P(D_2) \cdot P(V | D_2)}{P(D_1) \cdot P(V | D_1) + P(D_2) \cdot P(V | D_2) + P(D_3) \cdot P(V | D_3) + P(D_4) \cdot P(V | D_4)}$$

Como, $P(D_1) = P(D_2) = P(D_3) = P(D_4) = 1/4$; $P(V | D_1) = P(V | D_3) = 3/5$, e

$P(V | D_2) = P(V | D_4) = 1/5$, então,

$$P(D_2 | V) = \frac{\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right)} = 12,5\%$$

2) ¹Durante alguns anos, usou-se um teste para determinar se uma pessoa era ou não portadora de certa doença. A experiência (isto é, a frequência relativa) indica que, se a pessoa tem a doença, a probabilidade de que o teste seja positivo é de 0,9 (e conseqüentemente a probabilidade de que seja negativo é de 0,1). Por outro lado, se a pessoa não tem a doença, o teste tem a probabilidade de 0,05 de um resultado positivo (e conseqüentemente uma probabilidade de 0,95 de que seja negativo). Sabe-se que a probabilidade de uma pessoa ter a doença é de 0,001 (ou seja, cerca de um em cada 1.000 pessoas é portadora da doença). Sendo assim,

- I) Se o teste for aplicado a uma pessoa selecionada ao acaso, qual a probabilidade de um resultado positivo?
- II) Dado que o resultado do teste foi positivo, qual a probabilidade de que a pessoa tenha a doença?
- III) Qual a probabilidade de que o teste forneça informação incorreta?

¹ Exemplo extraído de Yoseloff (1978 p. 138, 145, 146, 147)

Obs.: Para a leitura da solução, considere a notação:

R+ → evento: há reação positiva **PD** → evento pessoa tem a doença
R- → evento: o teste é negativo **PN** → evento pessoa não tem a doença

Dados do problema:

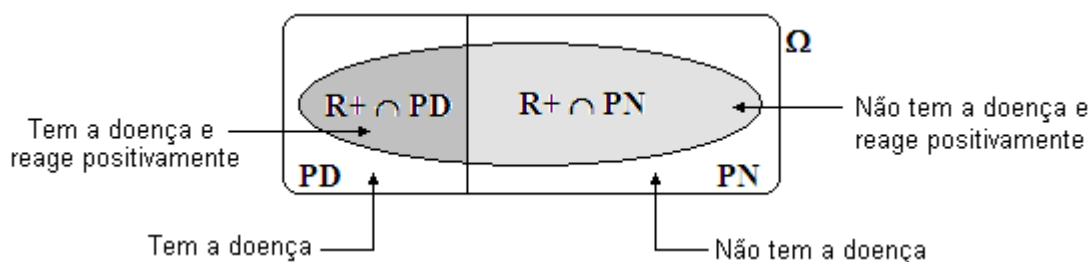
$$P(R+ | PD) = 0,9 \rightarrow P(R- | PD) = 0,1$$

$$P(R+ | PN) = 0,05 \rightarrow P(R- | PN) = 0,95$$

$$P(PD) = 0,001 \rightarrow P(PN) = 0,999$$

Solução 1 – Se o teste for aplicado a uma pessoa selecionada ao acaso, qual a probabilidade de um resultado positivo? Ou seja, qual é o valor de $P(R+)$?

Como, uma pessoa tem a doença (PD) ou não tem a doença (PN) - não é possível que ela tenha e não tenha - isso significa que os eventos são mutuamente exclusivos. ($PD \cup PN = \Omega$, $PD \cap PN = \emptyset$).



$$\text{Logo, } P(R+) = P(PD).P(R+ | PD) + P(PN).P(R+ | PN) =$$

$$= (0,001).(0,9) + (0,999).(0,05) = 0,0009 + 0,04995 = 0,05085 \approx 0,051.$$

Portanto, aproximadamente 5,1% das pessoas submetidas ao teste reagem positivamente.

Solução 2: Dado que o resultado do teste foi positivo, qual a probabilidade de que a pessoa tenha a doença? Ou seja, qual é o valor de $P(PD | R+)$?

Pela regra de Bayes:

$$P(PD | R+) = \frac{P(R+ | PD).P(PD)}{P(R+ | PD).P(PD) + P(R+ | PN).P(PN)}$$

Como $P(R+ | PD).P(PD) + P(R+ | PN).P(PN) = P(R+) = 0,05085$ vem que:

$$P(PD | R+) = \frac{0,0009}{0,05085} = 0,018$$

Portanto, aproximadamente 1,8% das pessoas doentes que são submetidas ao teste, reagem positivamente.

Solução 3: Qual a probabilidade de que o teste forneça informação incorreta?

Seja o evento E de que um erro ocorra. Como E ocorre se e somente se, a pessoa não tem a doença e reage positivamente ($PN \cap R+$) ou se a pessoa tem a doença e reage negativamente ($PD \cap R-$), temos que:

$$P(E) = P(R+ \cap PN) \cup P(R- \cap PD).$$

Como os eventos são mutuamente exclusivos, segue que:

$$P(E) = P(R+ \cap PN) + P(R- \cap PD), \text{ isto é,}$$

$$P(E) = P(R+ | PN) \cdot P(PN) + P(R- | PD) \cdot P(PD) = 0,04995 + 0,0001 = 0,05005$$

Conseqüentemente, a probabilidade de erro é de aproximadamente 5%.

Observação: De acordo com Yoseloff (1978, p.147) este último resultado em conexão com a solução II sugere que, embora a probabilidade de erro seja bastante pequena, o teste não deve ser considerado satisfatoriamente eficiente. E isso, porque apenas 1,8% das pessoas que reagem positivamente ao teste são portadoras da doença. A razão está no fato de que é pequena a probabilidade de uma pessoa ser portadora da doença.

8- Ensaios de Bernoulli: a distribuição binomial

Até agora consideramos a probabilidade de acontecimentos que são mutuamente exclusivos, dependentes e independentes. Porém, se esses fatores forem variados e combinados, novos e interessantes métodos aparecem.

Para ilustrar, vamos supor uma urna que contém em seu interior 4 bolas brancas e 4 bolas pretas Logo se retirarmos uma bola dois acontecimentos são equiprováveis, ou seja, ser branca (B) ou preta(P). Vamos escrever isso da seguinte forma:

Na primeira retirada há dois resultados possíveis, ou seja: 2^1

a) (1) (B) (2) (P)

Na segunda retirada há quatro resultados possíveis (2^2):

b) (1) (B)(B) (2) (B)(P) (3) (P)(B) (4) (P)(P)

Em três retiradas, há oito resultados possíveis (2^3);

- c) (1) (3) (5) (7)
 (2) (4) (6) (8)

Em quatro retiradas, há dezesseis resultados possíveis (2^4);

- d) (1) (5) (9) (13)
 (2) (6) (10) (14)
 (3) (7) (11) (15)
 (4) (8) (12) (16)

Generalizando, em n retiradas há 2^n resultados possíveis.

Sendo assim, isso nos permite utilizar o teorema do binômio. Suponha que **B** simbolize a retirada de uma bola branca e **P** a retirada de uma bola preta. Desenvolvendo a expressão $(B + P)^2$, segue que:

$$BB + BP + PB + PP = B^2 + 2BP + P^2.$$

Note que esta expressão algébrica apresenta de forma resumida, a distribuição mostrada explicitamente em (b) acima, ou seja, todos os resultados possíveis de duas retiradas de uma urna que contenha o mesmo número de bolas brancas e bolas pretas.

Observe que, para três retiradas podemos escrever a expressão:

$$(B + P)^3 = B^3 + 3B^2P + 3BP^2 + P^3,$$

que, por sua vez, representa todos os oito resultados possíveis que estão apresentados em (c), ou seja, um de retirar três bolas brancas, três de retirar duas brancas e uma preta, três de retirar duas pretas e uma branca e uma de retirar três bolas pretas, cujas probabilidades associadas são, respectivamente, $1/8$, $3/8$, $3/8$ e $1/8$.

Generalizando, temos que para n retiradas sucessivas, o teorema do binômio nos oferece todos os resultados possíveis de n retiradas, caso estas retiradas sejam feitas a partir de uma urna que contenha o mesmo número de bolas brancas e bolas pretas. Em síntese,

$$(B + P)^n = B^n + nB^{n-1}P + \frac{n(n-1)}{2!} B^{n-2}P^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} B^{n-3}P^3 + \dots + P^n$$

Exemplo: Suponha que peças saiam de uma linha de produção e sejam classificadas como defeituosas (D) ou como não defeituosas (P), isto é, perfeitas. Admita que três peças, da produção de um dia, sejam escolhidas aleatoriamente e classificadas de acordo com esse esquema. Logo, o espaço amostral Ω para esse experimento pode ser assim, apresentado:

$$\Omega = \{DDD, DDP, DPD, PDD, PPD, PDP, DPP, PPP\}$$

Suponha, agora, que a probabilidade de sair uma peça defeituosa seja 0,3 (e, conseqüentemente, 0,7 a probabilidade de sair uma peça perfeita), pelo menos enquanto durar o experimento. Além disso, suponha que a classificação de qualquer peça seja independente da classificação de outra qualquer peça.

Com essas suposições, segue que as probabilidades associadas aos diferentes resultados do espaço amostral Ω , são $(0,3)^3$, $(0,3)^2(0,7)$, $(0,3)^2(0,7)^1$, $(0,3)^2(0,7)^1$, $(0,3)^1(0,7)^2$, $(0,3)^1(0,7)^2$, $(0,3)^1(0,7)^2$, $(0,7)^3$.

Note-se que, em geral, nosso interesse não está voltado para todos os resultados individuais de Ω . Ao contrário, o interesse é saber quantas peças defeituosas seriam encontradas, não importando a ordem em que elas pudessem interessar. Em outras palavras, desejamos estudar a variável aleatória X , a qual atribui a cada resultado $s \in \Omega$ o número de peças defeituosas encontradas no experimento. Portanto, o conjunto de valores possíveis de X é $\{0, 1, 2, 3\}$.

Com isso, é possível obter a distribuição de probabilidade de X , $p(x_i) = P(X = x_i)$, da seguinte maneira:

$X = 0$ se, e somente se, ocorrer DDD

$X = 1$ se, e somente se, ocorrer DDP, DPD e PDD

$X = 2$ se, e somente se, ocorrer DPP, PDP e PPD

$X = 3$ se, e somente se, ocorrer PPP

Então,

$$p(0) = P(X = 0) = (0,3)^3$$

$$p(2) = P(X = 2) = 3(0,3)^1(0,7)^2$$

$$p(1) = P(X = 1) = 3(0,3)^2(0,7)^1$$

$$p(3) = P(X = 3) = (0,7)^3$$

Observe que a soma dessas probabilidades é igual a **1**, pois a soma pode ser escrita como $(0,3 + 0,7)^3 = 1^3 = 1$.

9- A Lei Binomial de Probabilidade

Teorema VII: Em uma seqüência de n ensaios de Bernoulli [isto é, n realizações de uma experiência com dois resultados possíveis, ou seja, sucesso (S) o fracasso (F)] seja p a probabilidade de sucesso em um dado ensaio qualquer. Então a probabilidade de exatamente k sucessos ($0 \leq k \leq n$) em n ensaios é

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Demonstração: Suponha uma experiência que se repete n vezes e que em qualquer uma delas tenhamos $P(S) = p$ e $P(S^c) = P(F) = 1 - p$.

Qual é, então, a probabilidade do evento A ocorrer em i das n experiências? Note que em cada uma das n experiências $P(S)$ e $P(F)$ são constantes e o resultado de cada experiência é independente dos resultados anteriores.

Sendo assim, a probabilidade de obter i vezes o evento S e $n - i$ o evento F, em qualquer ordem é o produto das probabilidades. Ou seja, $p^i \cdot (1-p)^{n-i}$.

Como é conveniente ao problema qualquer conjunto ordenado de n elementos, sendo i iguais a S e $n - i$ iguais a F, devemos calcular o número de permutações que satisfazem (o número permutações de n elementos com i iguais a S e $n - i$ iguais a F), isto é:

$$\frac{n!}{i! (n-i)!} \quad \text{que equivale a } \binom{n}{i}$$

E, em seguida, multiplicar este número pelo produto das probabilidades, obtendo a expressão,

$$P_i = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Que é denominada Lei Binomial de Probabilidade, porque coincide com termo T_{i+1} do desenvolvimento de $[p + (1-p)]^n$.

Exemplo 1: Admita que uma válvula eletrônica, instalada em determinado circuito, tenha probabilidade 0,3 de funcionar mais de 600 horas. Se examinarmos 20 válvulas, qual é a probabilidade de que delas, exatamente K, funcionem mais que 600 horas, $k = 0, 1, 2, 3, \dots, 20$?

Solução: Se X for o número de válvulas que funcionem mais de 600 horas, vamos admitir que X tenha uma distribuição binomial. Então,

$$P(X = k) = \binom{20}{k} (0,3)^k \cdot (0,7)^{20-k}$$

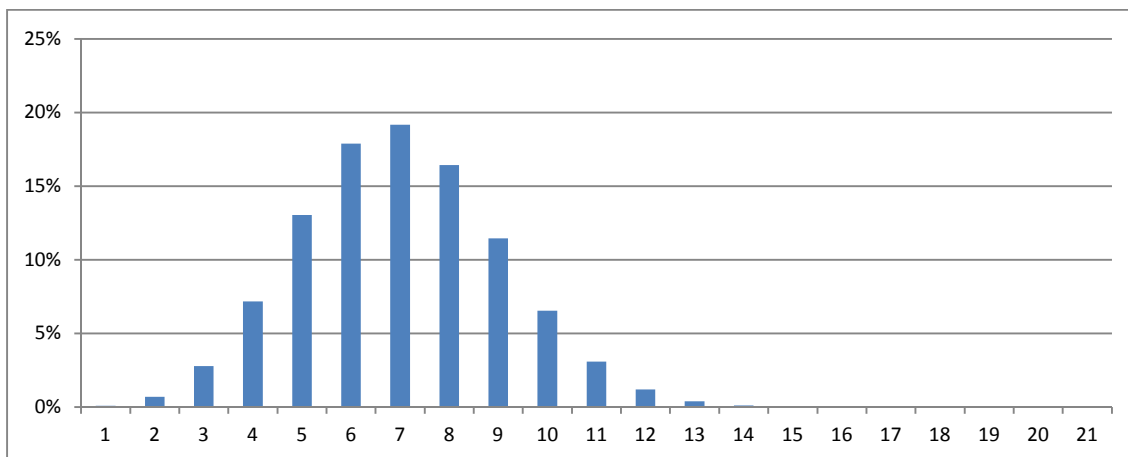
cujos valores associados podem ser lidos na tabela 1, abaixo.

TABELA 1:

$P(X = 0) = 0,001$	$P(X = 5) = 0,179$	$P(X = 10) = 0,031$
$P(X = 1) = 0,007$	$P(X = 6) = 0,192$	$P(X = 11) = 0,012$
$P(X = 2) = 0,028$	$P(X = 7) = 0,164$	$P(X = 12) = 0,004$
$P(X = 3) = 0,072$	$P(X = 8) = 0,114$	$P(X = 13) = 0,001$
$P(X = 4) = 0,130$	$P(X = 9) = 0,065$	$P(X = 14) = 0^+ \text{ para } K \geq 14$

(*) As probabilidades restantes são menores do que 0,001

Se marcarmos os valores dessa distribuição, vamos obter o gráfico de configuração bastante geral, apresentado na figura abaixo. Note-se que as probabilidades binomiais crescem de forma monótona até atingir um valor máximo para, em seguida, decrescer de maneira idêntica.



Exemplo 2: Um vendedor sabe que 22% das pessoas de sua clientela comprarão o seu produto. Se certo dia ele faz contato com quatro clientes, qual é a probabilidade de que *exatamente uma pessoa compre* o seu produto? Também, qual é a probabilidade de que *pelo menos uma pessoa compre* o seu produto?

Solução1: Trata-se de uma experiência que consiste em 4 ensaios de Bernoulli. Se considerarmos como sucesso de venda $p = 22\% = 22/100 = 11/50$ e V o evento de exatamente uma venda, então,

$$P(V) = \binom{4}{1} \left(\frac{11}{50}\right)^1 \left(1 - \frac{11}{50}\right)^{4-1} \approx 0,42$$

Em outras palavras, o vendedor tem, aproximadamente, 42% de chances de vender exatamente um produto.

Solução2: a próxima questão é: qual é a probabilidade de que *pelo menos uma pessoa* compre o seu produto (isto é, que ele faça uma venda, duas ou três vendas)? Se V é o evento de que pelo menos uma pessoa compre o produto, o evento V^c é o evento de que nenhuma pessoa compre alguma coisa. Como,

$$P(V^c) = \binom{4}{0} \left(\frac{11}{50}\right)^0 \left(1 - \frac{11}{50}\right)^{4-0} \approx 0,37$$

vem que $P(V) = 1 - P(V^c) = 0,63$, ou seja: o vendedor tem uma chance de aproximadamente 62% de realizar pelo menos uma venda, ao final de suas visitas.

A ser continuado ...

Referências Bibliográficas

- Biblioteca Científica Life. As Matemáticas. José Olímpio. Rio de Janeiro, 1964.
- BOREL, E. Probabilidade e certeza. Difusão Européia do Livro. São Paulo, 1956.
- BUNCHAFT, G. e KELLNER, S. R. O. Estatística sem mistérios (4 V). Vozes. Petrópolis, 1997.
- GARDNER, M. Ah, apanhei-te! Paradoxos de pensar e chorar por mais Gradiva. Lisboa, 1993.
- HOGGEN, L. Maravilhas da Matemática. Globo. Rio de Janeiro, 1956.
- IVES, H. Introdução a História da matemática. Unicamp. Campinas, 2004.
- KASNER, E e NEWMAN, J. Matemática e Imaginação. Zahar. Rio de Janeiro 1968.
- LIDSKI, V. B. et al. Problemas de matemáticas elementales. Editorial Mir. Moscou, 1993.
- MEYER, P. L. Probabilidade: aplicações a estatística. Livros Técnicos. Rio de Janeiro, 1977.
- MILODINOW, L. O andar do bêbado. Zahar. Rio de Janeiro, 2009.
- MORGADO, A. C. O et al. Análise combinatória e probabilidade. Impa. Rio de Janeiro,

1991.

SHASHA, D. Códigos, enigmas e conspirações. Gradiva. Lisboa, 1995.

SPIEGEL. M. R. Estatística. McGraw-Hill. São Paulo, 1977.

SPIEGEL. M. R. Probabilidade e estatística. McGraw-Hill. São Paulo, 1978.

STEWART, I. Jogos, conjuntos e Matemática. Enigmas e mistérios. Gradiva. Lisboa, 1994.

STIGLER, S. M. The History of Statistics. Harvad. Cambridge, s/d.

YOSELOFF, W. Matemática Finita. Guanabara Dois. Rio de Janeiro, 1978.